ALUMNOS PENDIENTES 1º BACHILLERATO CCNS

PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

1.- Indica en radianes la medida de los siguientes ángulos expresados en grados sexagesimales:

135º   215º   85º   475º   315º   36º 35’

2.- Los siguientes ángulos están expresados en radianes. Escríbelos en grados sexagesimales.

$\frac{7\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{5}$ $\frac{15\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{2}$ 3π 4 $\frac{-\pi}{3}$

3.- Calcula el área de un sector circular sabiendo que el radio es igual a 3 cm y el ángulo que abarca es de $3\pi/4$ radianes. Halla también su perímetro.

4.- En una circunferencia de radio 16 cm, un arco mide 2 cm. Averigua el ángulo central que abarca dicho arco.

5.- ¿Qué radio tiene una circunferencia si sabemos que a un ángulo central de $\frac{3\pi}{4}$ radianes le corresponde un arco de 5 m?

6.- Un ciclista recorre una pista circular a una velocidad de 0,2 radianes/segundo. Si la pista tiene un radio de 50 m, ¿qué velocidad lineal lleva?

8.- Completa el siguiente cuadro:

Dato conocido	sen $\alpha = 2/5$	cos $\alpha = -1/3$	tag $\alpha = -2$
Cuadrante	$\alpha \in 2º$	$\alpha \in 3º$	$\alpha \in 4º$
sen α			
cos α			
tag α			

9.- Sabiendo que $\sec\alpha = -3$ y que α es un ángulo del segundo cuadrante, calcula las restantes razones trigonométricas de α .

10.- Si $\operatorname{sen}\alpha < 0$ y además $\operatorname{cotag}\alpha = -4$, encuentra las restantes razones trigonométricas de α .

11.- Entre 0º y 360º, ¿cuántos ángulos existen cuyo seno sea igual a 1/3? Represéntalos.

12.- Dibuja los ángulos α , β y φ sabiendo que:

$\operatorname{sen}\alpha = -0{,}7$ $\qquad \cos\beta = 1/3$ $\qquad \operatorname{tag}\varphi = -5$

13.- Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \cos^4\alpha$

b) $\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

c) $1 + \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{tag}^2\alpha = \sec^2\alpha + \operatorname{tag}\alpha \cdot \cos\alpha$

d) $\operatorname{sen}^2\alpha = \left(\sec^2\alpha - 1\right) \cdot \cos^2\alpha$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha} + \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{tag}^2\alpha$

f) $\dfrac{\operatorname{tag}\alpha}{\sec\alpha - 1} = \dfrac{\sec\alpha + 1}{\operatorname{tag}\alpha}$

14.- Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}^3\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

b) $\dfrac{\operatorname{tag}\alpha \cdot \cos\alpha + \operatorname{tag}^3\alpha \cdot \cos\alpha}{\sec^2\alpha}$

c) $\left[\dfrac{1}{\cos\alpha - \cos^2\alpha} - \dfrac{1}{\cos\alpha + \cos^2\alpha}\right] \cdot \dfrac{1}{\sec^2\alpha}$

d) $\dfrac{\cos^3\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha}{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$

e) $\left(2\operatorname{tag}^2\alpha - 2\operatorname{cot}ag^2\alpha\right) \cdot \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

15.- Reduce las siguientes razones trigonométricas a razones de ángulos menores que 45º. Una vez llegados a este punto, calcula dicha razón utilizando, si es preciso, la calculadora.

$\operatorname{sen}175^\circ$	$\cos 235^\circ$	$\operatorname{tag}315^\circ$	$\operatorname{cosec}635^\circ$
$\sec(-215^\circ)$	$\operatorname{cotag}115^\circ$	$\operatorname{sen}1125^\circ$	$\cos(-3145^\circ)$

16.- Simplifica las siguientes expresiones:

a) $$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{tag}(\pi+\alpha)}{\cos\alpha\cdot\operatorname{tag}\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

b) $$\frac{\operatorname{tag}(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{cotag}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tag}^2\alpha}$$

c) $$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha)}{1-\operatorname{sen}^2(2\pi-\alpha)}-\operatorname{sen}(\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$$

17.- Comprueba que:

$$\operatorname{sen}(90^\circ-\alpha)\cdot tag\,(90^\circ-\alpha)\cdot\cos(180^\circ+\alpha)\cdot tag\,(180^\circ+\alpha)=-\cos^2\alpha$$

18.- Con la ayuda de una calculadora averigua el valor de las siguientes razones trigonométricas:

$\operatorname{sen}28^\circ\,37'$	$\cos -127^\circ\,17'\,48''$	$\operatorname{tag}213^\circ\,46'$
$\operatorname{cosec}\pi/7\,r$	$\sec 4{,}25\,r$	$\operatorname{cotag}-0{,}5\,r$

19.- Halla, sin utilizar calculadora, el valor del ángulo x en los siguientes casos:

$\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$	$\cos x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{tag}x=1$
$\operatorname{cosec}x=-\sqrt{2}$	$\sec x=\pm\infty$	$\operatorname{cotag}x=\frac{-\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{sen}x=1$	$\cos x=-1$	$\operatorname{tag}x=\pm\infty$

20.- Obtén, con la ayuda de la calculadora, el valor del ángulo x en los siguientes casos:

$\operatorname{sen} x = 0{,}34$ $\cos x = 0{,}74$ $\operatorname{tag} x = -3{,}25$

$\operatorname{cosec} x = 4$ $\sec x = -8{,}24$ $\operatorname{cotag} x = 25{,}36$

21.- Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$ b) $2\cos x = 3\operatorname{tag} x$

c) $4\operatorname{tag} x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}$ d) $(3 - 5\cos x)(1 + \operatorname{tag}^2 x) = 2$

e) $\operatorname{tag}^2 x - \operatorname{tag} x + 3\operatorname{cotag} x = 3$ f) $\sec x = 2(\operatorname{sen} x + \cos x)$

g) $\operatorname{sen}(4x) = \dfrac{-1}{2}$ h) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$

22.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas:

a) $\left.\begin{array}{r} \operatorname{sen}(x+y) = 1 \\ \operatorname{sen}(x-y) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} \operatorname{sen} x + \cos y = \sqrt{2} \\ \operatorname{cosec} x + \sec y = 2\sqrt{2} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \operatorname{tag} x + \operatorname{cotag} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 y = 0 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} \operatorname{sen} x + \cos y = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \dfrac{-1}{4} \end{array}\right\}$

23.- En los siguientes casos resolver el triángulo rectángulo en A cuando se conocen los datos siguientes:

a) $B = 38^\circ\, 45'$ $c = 25$

b) $B = 47^\circ\, 36'$ $a = 38$

c) $C = 27^\circ\, 12'$ $c = 18$

d) $a = 54$ $b = 39$

e) $b = 15$ $c = 28$

24.- ¿Qué longitud ha de tener una escalera de bombero para llegar al tercer piso que está a 7 metros de la calle si se apoya formando un ángulo de 60º con el suelo.

25.- Desde un barco se mide por radar la distancia a la cima de una montaña, resultando 3200 metros. La visual forma con la horizontal un ángulo de 45º. Halla la altura de la montaña.

26.- El altímetro de una avioneta señala que vuela a una altura de 4500 metros. Desde ella se ve la torre de control mediante una visual que forma un ángulo de 30º con la vertical. Calcula la distancia al campo de aterrizaje.

27.- Un globo está sujeto al suelo mediante una cuerda de 80 metros de larga que forma con el suelo un ángulo de 60º. Suponiendo que la cuerda esté recta, calcula la altura del globo.

28.- La sombra de una torre es de 10 metros. Calcula su altura sabiendo que los rayos del Sol forman con el suelo un ángulo mitad del que forman los rayos con la torre.

29.- Halla la longitud de la base de un triángulo isósceles cuya altura mide $2\sqrt{2}$ metros, siendo el ángulo opuesto a la base de 60º

30.- Las dos ramas de un compás forman un ángulo de 54º y sus puntas están separadas por 14 cms. Halla la longitud de cada una de las ramas.

31.- En una circunferencia de 7 cms de radio trazamos una cuerda de 9 cms. ¿Qué ángulo central abarca dicha cuerda?

32.- Dada una circunferencia de 5 cms de radio trazamos dos rectas tangentes a ella desde un punto situado a 7 cms del centro. ¿Qué ángulo forman entre sí las tangentes?

33.- Determina las longitudes de las diagonales de un rombo de 15 cms de lado sabiendo que uno de sus ángulos es de 47º.

34.- Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo conociendo que la medida de su perímetro es 36 cms y que la tangente de uno de sus ángulos es igual a 1,5.

35.- Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo siendo el cateto $b = 75\,\text{cms}$ y la bisectriz del ángulo agudo C igual a 94 cms.

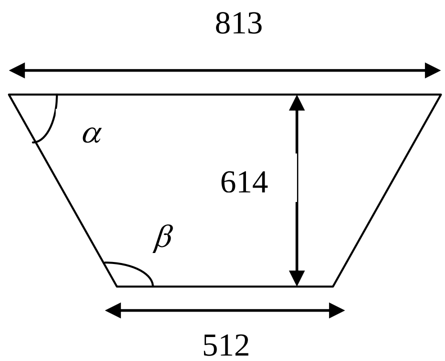
36.- Halla los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa son 3 cms y 1 cm.

37.- Calcula el área de un triángulo rectángulo tal que el radio de la circunferencia circunscrita mide 8 cms y uno de los ángulos satisface la ecuación trigonométrica siguiente:

$$2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x = \text{tag}\,x$$

38.- Si vemos una chimenea bajo ángulo de 30º, ¿bajo qué ángulo la veríamos si la distancia fuera doble?, ¿y si fuera triple?

39.- Halla las razones trigonométricas de los ángulos α y β de un trapecio isósceles cuyos datos son:



40.- El punto más alto de una torre se ve desde la posición de un hombre en el suelo formando un ángulo de 30º con la horizontal. Si el hombre se acerca 40 metros hacia el pie de la torre, este ángulo se convierte en 60º. Halla la altura de la torre.

41.- Desde los puntos B y C separados entre sí 10 metros y situados en una de las orillas de un río, se observa el pie de un árbol en la orilla contraria. Las visuales forman con la orilla ángulos de 30º y 60º. Calcula la anchura del río.

42.- En un campo de fútbol un recogepelotas que está situado en una de las bandas laterales ve los postes de las porterías bajo ángulos de 60º y 45º. Sabiendo que la portería mide 7 metros de poste a poste, calcula a qué distancia de la línea de fondo se encuentra el recogepelotas.

43.- Representa y compara las funciones siguientes:

$y = \operatorname{sen} x$ $\quad y = \operatorname{sen}(2x)$ $\quad y = 2\operatorname{sen} x$ $\quad y = 2 + \operatorname{sen} x$

$y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad y = 1 - \operatorname{sen}(x - \pi)$ $\quad y = \left|3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ $\quad y = 2 - \left|\frac{1}{2} sen\ (2x)\right|$

44.- Apoyándote en el problema anterior representa sin dar puntos las gráficas de las funciones siguientes:

$y = \cos(2x)$ $\quad y = 3 + \operatorname{sen}(3x)$ $\quad y = 2 + 4\cos(2x)$ $\quad y = \operatorname{tag}(x/2)$

$y = 3 + 2\cos(x/3)$ $\quad y = 2 - \operatorname{sen}(x - \pi/4)$

$y = 2\operatorname{tag}(2x - \pi)$ $\quad y = 1 + (1/2)\operatorname{sen}(4x + \pi)$

45.- Dibuja y da la ecuación de una onda del tipo $y = \operatorname{sen} x$ con las siguientes características:

a) Amplitud 2, periodo π y pasa por $(-\pi/4{,}0)$

b) Amplitud $1/2$, periodo $2\pi/3$ y pasa por el punto $(\pi/2{,}0)$

46.- Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$y = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$ $\quad y = \cot\operatorname{ag}(2x)$ $\quad y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

47.- Calcula:

$\cos(\arccos 0{,}5)$ $\quad \cos(\operatorname{arcsen}(-0{,}2))$ $\quad \arccos(\operatorname{sen}(-\pi/7))$

48.- Demuestra que:

$$\arccos x + \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2}$$

49.- Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = 4/5$ y $\operatorname{sen}\beta = 12/13$ y que además $0^o < \alpha < 90^o < \beta < 180^o$, calcula:

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ b) $\cos(\alpha+\beta)$ c) $\operatorname{tag}(\alpha+\beta)$

50.- Sin utilizar calculadora averigua el valor de las razones trigonométricas de los ángulos:

a) 105º b) 285º c) 165º

51.- Dados $\operatorname{sen} 6^o = 0{,}1045$ y $\operatorname{sen} 37^o = 0{,}6018$, encuentra, sin ayuda de la calculadora, las siguientes razones trigonométricas:

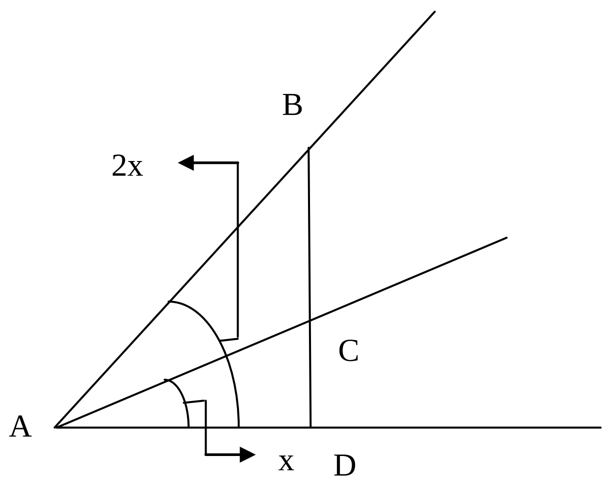
a) $\cos 31^o$ b) $\operatorname{sen} 8^o$ c) $\cos 39^o$ d) $\operatorname{sen} 7^o$ e) $\operatorname{sen} 53^o$

52.- Halla $\operatorname{sen}(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\operatorname{tag}(\alpha/2)$ y $\operatorname{tag}(\alpha-\pi/3)$ si $\cos\alpha = -1/\sqrt{10}$ y α es un ángulo del segundo cuadrante.

53.- Si a y b son dos ángulos del tercer y cuarto cuadrante respectivamente y $\operatorname{sen} a = -3/5$ y $\cos b = 4/5$, calcula:

a) $\operatorname{sen}\left(b+\dfrac{a}{2}\right)$ b) $\cos(a-2b)$ c) $\operatorname{tag}\left(2a-\dfrac{b}{2}\right)$

54.- Calcula el valor del ángulo x de modo que la longitud *BD* sea triple que la *CD*.



55.- Sin utilizar calculadora, halla el área de un octógono regular de 10 cms de lado.

56.- Calcula $\operatorname{sen}(3\alpha)$ sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$

57.- Expresa $\operatorname{tag} x$ en función de $\cos(2x)$.

58.- Calcula $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arctag}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arctag}\left(\frac{5}{12}\right)\right)$

59.- Si $a+b+c=90^\circ$, demuestra que: $\operatorname{tag} a \cdot \operatorname{tag} b + \operatorname{tag} b \cdot \operatorname{tag} c + \operatorname{tag} a \cdot \operatorname{tag} c = 1$

60.- Si $a+b+c=180^\circ$, demuestra que: $\operatorname{tag} a + \operatorname{tag} b + \operatorname{tag} c = \operatorname{tag} a \cdot \operatorname{tag} b \cdot \operatorname{tag} c$

61.- Transforma en producto las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{sen} 30^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ$ b) $\cos 15^\circ - \cos 65^\circ$ c) $\operatorname{sen} 25^\circ - \cos 40^\circ$

d) $\operatorname{sen}(3a) + \operatorname{sen} a + 2\operatorname{sen}(2a)$ e) $\cos a + \cos(3a) + \cos(7a) + \cos(9a)$

f) $1 - \cos a$

62.- Transforma en suma los siguientes productos:

a) $\operatorname{sen} 25^\circ \cdot \cos 40^\circ$ b) $\cos 50^\circ \cdot \cos 65^\circ$

c) $\operatorname{sen}(2a) \cdot \operatorname{sen} a$ d) $\operatorname{sen}(5a) \cdot \cos(3a)$

63.- Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(b-c) + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(c-a) + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen}(a-b) = 0$

b) $\dfrac{\operatorname{cotag}\alpha + \operatorname{tag}\alpha}{\operatorname{cotag}\alpha - \operatorname{tag}\alpha} = \sec(2\alpha)$

c) $\dfrac{\operatorname{tag}\alpha}{\operatorname{tag}(2\alpha) - \operatorname{tag}\alpha} = \cos(2\alpha)$

d) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tag}\dfrac{\alpha}{2}$

e) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tag}(2\alpha)} = \cos\alpha - \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$

f) $\dfrac{1-\operatorname{tag}\alpha}{1+\operatorname{tag}\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{sen}(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$

g) $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tag}\dfrac{\alpha}{2}$

h) $1+\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}^2\left(45^{\circ}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$

i) $\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha=2\cos^2\alpha-1$

j) $\dfrac{\operatorname{sen}(5\alpha)+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(3\alpha)-\operatorname{sen}\alpha}=3\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$

k) $\operatorname{sen}^2(3\alpha)-\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{sen}(4\alpha)\cdot\operatorname{sen}(2\alpha)$

m) $\cos 40^{\circ}+\cos 80^{\circ}+\cos 160^{\circ}=0$

64.- Prueba que si α y β son complementarios se verifica:

$$(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)\cdot(\cos\alpha+\cos\beta)=1+\operatorname{sen}(2\alpha)$$

65.- Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

b) $\dfrac{1-\operatorname{sen}(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}-\dfrac{1-\operatorname{tag}\alpha}{1+\operatorname{tag}\alpha}$

c) $\dfrac{\operatorname{tag}(2x)}{1+\sec(2x)}-\dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$

66.- Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}(3x)=1$

b) $\cos(3x-\pi)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos(2x)$

e) $\cos(4x)=\operatorname{sen}25^{\circ}$

f) $\operatorname{tag}(\pi-x)=\operatorname{cotag}\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

g) $\cos(2x)+\operatorname{sen}x=0$

h) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}x$

i) $2\cos x + 4\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} = 3$

j) $4\operatorname{sen} x = \sec x$

k) $4\operatorname{sen}(x - 45^\circ)\cdot\cos(x - 45^\circ) = 1$

l) $2\operatorname{sen}(2x) = 3\operatorname{tag} x$

m) $\cos(2x) + 5\cos x + 3 = 0$

n) $\operatorname{sen}(2x)\cdot\cos x = 6\operatorname{sen}^3 x$

o) $3\cos x - 1 + \operatorname{tag}^2\dfrac{x}{2} = 0$

p) $\operatorname{sen}(6x) + \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(4x)$

q) $\cos(8x) + \cos(6x) = 2\cos 210^\circ\cdot\cos x$

r) $\cos(2x) + \cos x = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)$

s) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(4x) = 0$

67.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas:

a) $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x\cdot\cos y = \dfrac{3}{4} \\ \cos x\cdot\operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} \operatorname{tag}(2x) = \operatorname{cot\,ag} y \\ \operatorname{tag} x = \operatorname{cot\,ag}(2y) \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \\ \cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l} \cos x\cdot\cos y = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{tag} x + \operatorname{tag} y = 2 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{c} \cos x\cdot\cos y = \operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} y \\ \text{x - y} = 30^\circ \end{array}\right\}$

68.- Resuelve los triángulos de los que se conocen los siguientes datos:

a	b	c	A	B	C
12				45º	75º
	10	8	45º		
$20\sqrt{2}$			30º	45º	
3	6	4			
3	8		30º		
3	6		30º		
8	4		60º		
3	4		30º		

Calcula el área en los tres últimos casos

69.- Los lados de un triángulo son tales que sus longitudes forman una progresión aritmética de razón 10 m, siendo el perímetro 90 m. Halla $\cos A$ siendo A el ángulo que se opone al lado menor.

70.- Desde los puntos A y B de una orilla de un río se observa un punto P situado en la opuesta obteniéndose los siguientes datos:

$\angle PAB = 60^{\circ}$ $\angle PBA = 45^{\circ}$ $d(A,B) = 50$ m

¿Cuánto valen $d(P,A)$ y $d(P,B)$?

71.- En un triángulo ABC se conocen el lado $a = 10$ m, el ángulo en B que vale 105º y el ángulo en C que vale 30º. Halla los lados y el área del triángulo.

72.- Un jugador de fútbol ve la portería bajo un ángulo de 60º y está a una distancia de 5 m y 8 m de los dos postes. ¿Cuál es el ancho de la portería?

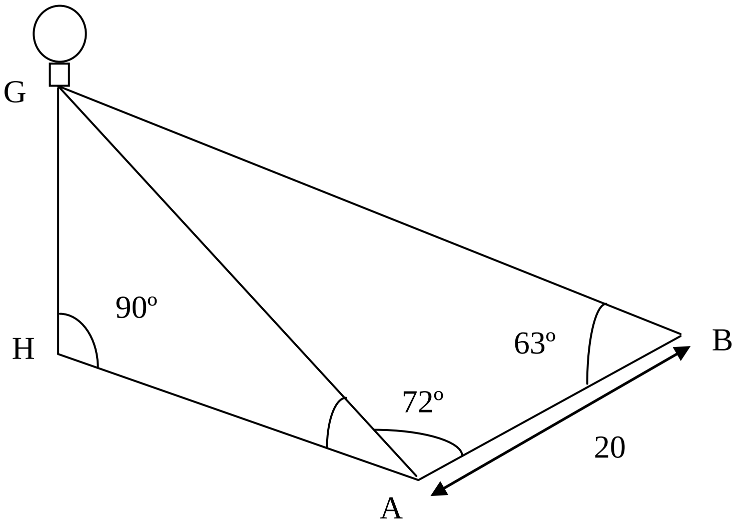
73.- Un barco B pide socorro recibiéndose las señales en las estaciones de radio A y C que distan entre sí 50 km. Desde cada estación se miden los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BCA$ que son respectivamente 46º y 53º. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

74.- Al Este y Sur de un globo cautivo se observa a éste bajo ángulos de 45º y 60º respectivamente. Sabiendo que entre los puntos de observación hay 1 Km de distancia, calcula la altura a la que está el globo.

75.- Las bases de un trapecio miden 17 y 10 dm y uno de sus lados 8 dm. El ángulo que forman las rectas al encontrarse los dos lados no paralelos es de 32º. Calcula lo que mide el otro lado y el área del trapecio.

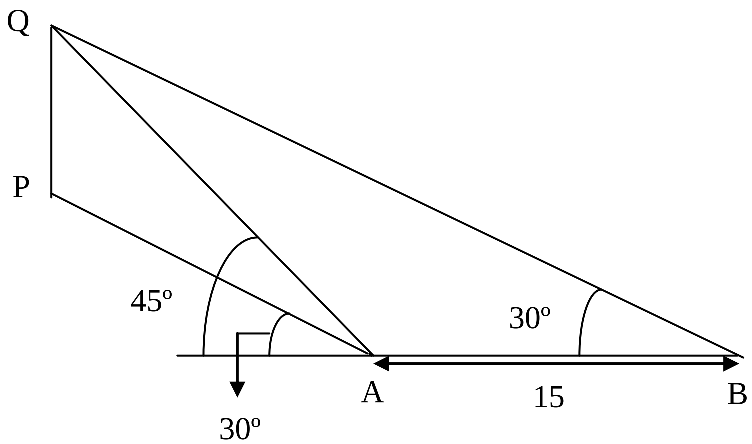
76.- Un barco pide socorro y las señales se reciben en dos estaciones de radio B y C que distan entre sí 80 km. La recta que une B y C forma con la dirección Norte un ángulo de 48º. La estación B recibe las señales con una dirección que forma 135º con el Norte, mientras que C las recibe con una dirección que forma un ángulo de 96º con el Norte. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

77.- Para hallar la altura de un globo G, realizamos las medidas indicadas en la figura



¿Cuánto dista el globo de los puntos A y B? ¿Cuál es la altura del globo?

78.- Calcula la altura de una ventana PQ en la siguiente figura:

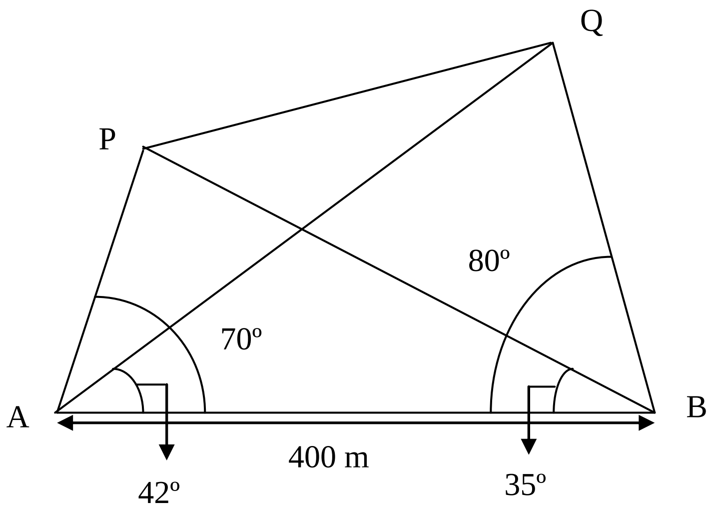


79.- Una escalera de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya en una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45º, mientras que si se apoya en la otra fachada el ángulo es de 30º. Halla la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza sobre cada una de las fachadas?

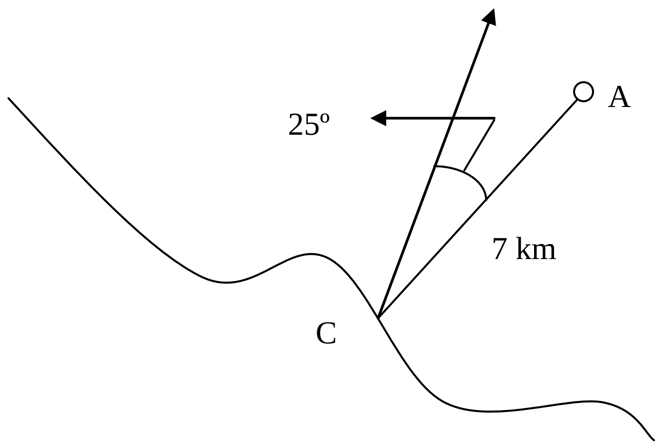
80.- Halla el ángulo que forman dos diagonales de un cubo.

81.- En un trapecio isósceles, las diagonales miden 10 cm ; la base menor 5 cm y uno de los ángulos del mismo 60º. Halla su perímetro.

82.- Calcula la distancia que existe entre los puntos P y Q de la figura siguiente:



83.- Un barco parte del puerto C con velocidad constante de 15 Km/h y el rumbo que marca la figura. Un radar situado en el punto A tiene un alcance de 4 Km. Halla el intervalo de tiempo durante el cual el radar detecta el barco.



PROBLEMAS SOBRE NÚMEROS COMPLEJOS

1.- Escribe en función de i:

$\sqrt{-8}$ $\qquad$ $\sqrt{-9}+\sqrt{-1}$ $\qquad$ $3\sqrt{-4}+\sqrt{4}$ $\qquad$ $-\sqrt{\frac{-1}{4}}$

2.- Resuelve las ecuaciones siguientes:

$x^2+16=0$ $\qquad$ $2x^2+5=0$ $\qquad$ $x^2-2x+2=0$

3.- Si $z_1=-1+i$, $z_2=3-\frac{1}{2}i$ y $z_3=2i$, calcula las siguientes expresiones:

z_1-z_2 $\qquad$ $z_1-(z_2+z_3)$ $\qquad$ z_2+5-z_3 $\qquad$ z_3-2z_2+3i

4.- Si $z_1=-1-2i$ y $z_2=-2+3i$, calcula:

z_1z_2 $\qquad$ $z_1(z_2+z_1)$ $\qquad$ $(z_1-1)(z_2+i)$ $\qquad$ $(z_1-3i)z_2{}^2$

5.- Realiza las siguientes divisiones de números complejos:

$\frac{2+3i}{1-5i}$ $\qquad$ $\frac{4+2i}{i}$ $\qquad$ $\frac{2}{1+5i}$ $\qquad$ $\frac{3i}{2-\sqrt{2}i}$

6.- Realiza las siguientes operaciones:

$\frac{i}{3+i}+\frac{3}{1-2i}$ $\qquad$ $\frac{(2+i)(1-i)}{-1+2i}$ $\qquad$ $\frac{3+i(1+2i)}{8i}$

$\frac{(1+3i)(3-i)}{(1+2i)(2-i)}$ $\qquad$ $\frac{(2+i)(3-i)}{(3+2i)(1+i)}-\frac{2+i}{2(3-i)}$ $\qquad$ $\frac{(3+i)^3}{4+i}$

7.- Calcula:

i^{123} $\qquad$ i^{85} $\qquad$ i^{54} $\qquad$ $1+i+i^2+\cdots+i^{44}$

8.- Halla las raíces cuadradas de los siguientes números complejos:

$-5+12i$ $\qquad$ $3+4i$ $\qquad$ $2+2\sqrt{3}i$

9.- Resuelve las ecuaciones siguientes:

$(2-i)z^2-2-4i=0$ $\quad iz^2+z-i=0$ $\quad z^2+(1-2i)z-1-i=0$

$z^4+z^2+1=0$ $\quad z^3+(-1+i)z^2+(2-i)z-2=0$

10.- Dado el cociente de números complejos $(3-2xi):(4-3i)$, determinar *x* para que:

a) sea imaginario puro

b) sea un número real

c) tenga su afijo en la bisectriz del primer-tercer cuadrante

11.- Hallar el valor de k para que el cociente $(2-(1+k)i):(1-ki)$ sea un número real. Calcula el cociente

12.- La suma de dos números complejos es $4+2i$, la parte real del primero es 3 y su cociente es imaginario puro. Halla los complejos

13.- Halla dos números complejos sabiendo que su diferencia es un número real, su suma tiene por parte real 2 y su producto es $-51+8i$.

14.- Determina un número complejo cuyo cuadrado es igual a su conjugado.

15.- Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

i) 3 $\quad$ ii) -3 $\quad$ iii) $2i$ $\quad$ iv) $-3i$ $\quad$ v) $3-3i$

vi) $-4+4i$ $\quad$ vii) $2\sqrt{3}-2i$ $\quad$ viii) $(1+i)(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)$

ix) $(1-\sqrt{3}i)^3$ $\quad$ x) $\dfrac{(1+i)(1-\sqrt{3}i)}{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}$

16.- Expresa en forma binómico los siguientes números complejos:

i) $2_{45^{\circ}}$ $\quad$ ii) $1_{270^{\circ}}$ $\quad$ iii) $5_{315^{\circ}}$ $\quad$ iv) $3_{150^{\circ}}$ $\quad$ v) $4_{210^{\circ}}$

17.- Calcula los valores de a para que sea 2 el módulo del complejo:

$$\frac{a+2i}{3+i}$$

18.- Determina los números reales x e y para que se cumpla:

$$\frac{x+2i}{3+yi}=\sqrt{2}_{315^\circ}$$

19.- El complejo de argumento 80º y módulo 12 es el producto de dos números complejos, uno de ellos el de módulo 3 y argumento 50º. Escribe el otro en forma binómico.

20.- Halla en forma polar el número complejo cuyo conjugado multiplicado por el número $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ es igual a $\frac{8}{1+i}$

21.- Halla un número complejo z sabiendo que se verifica:

$$\left|\frac{z-2}{2}\right|=1 \qquad \left|\frac{z-2i}{2i}=1\right|$$

22.- Busca un complejo que sumándolo con $\frac{1+i}{2-2i}$ da otro complejo de módulo $\sqrt{2}$ y argumento 45º

23.- Encuentra un complejo que multiplicado por i da un complejo de módulo 5 y cuya parte real es -4; sabiendo que su afijo está situado en el segundo cuadrante.

24.- La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el módulo del segundo 5. Halla estos complejos y determina su producto y su cociente.

25.- Calcula las siguientes potencias:

$$(1+i)^{20} \qquad \left(-2+2\sqrt{3}i\right)^{6} \qquad \left(4\sqrt{3}-i\right)^{5} \qquad \frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{4}}{(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{5}}$$

26.- Obtén:

a) módulo y argumento de $\sqrt{3}-i$

b) su cubo

c) sus raíces cúbicas

27.- Halla las siguientes raíces:

i) $\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}$ ii) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$ iii) $\sqrt[5]{16\sqrt{2}+16\sqrt{2}i}$

iv) $\sqrt[4]{64}$ v) $\sqrt[5]{-32i}$ vi) $\sqrt[3]{-8}$ vii) $\sqrt[3]{7-2i}$

viii) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}}$ ix) $\sqrt[4]{\dfrac{(1-\sqrt{3}i)(-1+i)}{(2-2i)(-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)}}$

28.- Resolver en el cuerpo de los números complejos las siguientes ecuaciones:

$z^3-27=0$ $(1+i)z^2-2z+4=0$ $z^4+z^2+1=0$

$z^5-64z^2=0$ $(1+i)z^3-2i=0$ $(\sqrt{3}+i)z^3-1+i=0$

29.-Calcula y representa las tres raíces cúbicas del complejo $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. Halla el área del triángulo determinado por los tres afijos de las raíces.

30.- Una raíz cúbica de un número complejo z es 2_{30}. Calcula z y las otras dos raíces expresadas en forma binómica.

31.- Halla la suma de los cuadrados de las raíces cúbicas de *i*.

32.- Establece la ecuación de segundo grado con coeficientes reales cuyas soluciones sean 3_{60° y 3_{300°. Si las soluciones fueran 3_{60° y 3_{120°, ¿tendría solución el problema?

33.- El número complejo $3-2i$ es raíz de una ecuación de segundo grado con coeficientes reales. ¿Cuál es la otra raíz? Escribe la ecuación.

34.- Halla el afijo del tercer vértice de un triángulo equilátero en el que los restantes vértices son los afijos de los números complejos 0 y $\sqrt{3}-i$.

35.- Al punto A(3,4) se le aplica un giro de 90º y centro el origen de coordenadas obteniéndose así el punto A’. Calcula las coordenadas de A’, el perímetro del triángulo AOA’ y su área.

36.- Expresa $\operatorname{sen}(5a)$ y $\cos(5a)$ en función de $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$.

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

1.- Representa en el plano:

a) Los puntos A(4,2) , B(-4,0) , C(-3,-1) , D(4,-3)

b) Los vectores u (2,-3) , v (-2,-2) , w (-4,0) , z (0,2)

2.- Halla las coordenadas de D para que los vectores AB y CD sean equipolentes, siendo A(2,-1) , B(-8,3) y C(2,1).

3.- El vector AB tiene de coordenadas (3,-4) y las coordenadas de A son (3,-1). ¿Cuáles son las coordenadas del punto B?

4.- Encuentra las coordenadas de los puntos M, N y P que dividen al segmento de extremos A(-2,-10) y B(6,2) en cuatro partes iguales.

5.- Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento de extremos A(2,3) y B(8,6) en tres partes iguales.

6.- El punto de coordenadas P(-2,1) divide al segmento AB en tres partes iguales. Si A es el punto de coordenadas (3,-2), ¿qué coordenadas tiene el punto B?

7.- Halla el punto simétrico del A(2,-1) respecto del B(-3,1)

8.- Los puntos A(1,1), B(-3,2) y C(-4,-1) son vértices del paralelogramo ABCD. Halla las coordenadas del punto D.

9.- Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices los puntos A(1,3), B(4,5) y C(-2,-5).

10.- Si el baricentro del triángulo ABC es P(2,1), determina las coordenadas de C sabiendo que A(-4,1) y B(4,-3).

11.- De un triángulo ABC se sabe que el punto medio del lado AB es P(3,-4), el del lado BC es Q(0,3) y el del AC es R(1,2): Halla las coordenadas de los vértices.

12.- Halla la ecuación de la recta en forma vectorial, paramétrica, continua y general en los dos casos siguientes:

a) Pasa por A(-1,2) y su vector direccional es v(3,5)

b) Pasa por los puntos A(-1,2) y B(3,-4)

13.- Calcula un vector direccional y la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas A(3,1) y forma con OX un ángulo de 45º.

14.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3,2) y tiene de pendiente 3/4 .

15.- Calcula la pendiente de las rectas siguientes:

$r: 2x - y + 4 = 0$ $\qquad s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ $\qquad t: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-3}$

16.- averigua si los puntos A(3,0), B(4,2), D(0,-6) y E(1,0) pertenecen a la recta de ecuación:

$$s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \end{cases}$$

17.- Halla las ecuaciones de los lados del triángulo de vértices A(-2,-3), B(-2,2) y C(3,2) Calcula también las ecuaciones de las medianas del triángulo.

18.- Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,2) y por el simétrico del punto B(-1,3) respecto del punto P(2,-3).

19.- Averigua la ecuación de la recta que, pasando por el punto A(2,-3), tiene la misma pendiente que la recta:

$$s: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

20.- La recta de pendiente 3 y que pasa por el punto P(2,3), corta a los ejes coordenados en los puntos A y B. Calcula el área del triángulo ABO.

21.- Una recta pasa por el punto A(1,%) y determina con los semiejes positivos un triángulo de 18 u^2. Calcula la ecuación de la recta.

22.- Averigua si los puntos A(2,1), B(3,0) y C(0,3) están alineados.

23.- Laos puntos A(-1,0), B(a,3) y C(1,1) están alineados. Calcula a.

24.- Calcula el punto de corte de las rectas de ecuaciones:

$$r: x-3y+2=0 \qquad s: 2x+y=0$$

25.- Dadas las rectas $ax+y-5=0$ y $2x-by-7=0$, halla a y b sabiendo que se cortan en el punto P(2,3).

26.- Determina k para que las rectas:

$$r: x-y+1=0 \qquad s: x-2y+3=0 \qquad t: 3x+y-k=0$$

se corten en un mismo punto.

27.- Halla el punto de intersección de la recta que, pasando por el punto A(1,2), tiene de pendiente -1, con la recta que corta a los ejes en (2,0) y (0,3)

28.- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas de ecuaciones: $2x+y-1=0$, $x-y+4=0$ y forma un ángulo de 135º con OX.

29.- Calcula el valor de a para que las rectas $4x-2y+1=0$ y $x-ay+4=0$ sean paralelas.

30.- Averigua el valor de a para que las rectas de ecuaciones:

$$ax+(a-1)y-2(a+2)=0 \qquad 3ax-(3a+1)y-5(a+4)=0$$

sean paralelas.

31.- Halla la ecuación de la recta que pasa por A(-1,3) y es paralela a $x-3y+5=0$.

32.- Dado el triángulo ABC donde A(1,3), B(3,-1) y C(-2,1), halla la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a la recta determinada por B y C.

33.- Encuentra la ecuación de la recta que, pasando por el punto de intersección de las rectas:

$$r:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \end{cases} \qquad\qquad s:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$$

sea paralela al eje de ordenadas.

34.- Calcula la ecuación de la recta que, pasando por el punto simétrico del A(1,2) respecto del M(3,4), sea paralela a la recta $2x-5y+1=0$.

35.- Las rectas $r:ax-4y+4=0$ y $s:3x+by+10=0$ son paralelas y P(1,-1) es un punto perteneciente a s. Determina a y b.

36.- Las rectas $r:x+2y=0$ y $s:3x-y=0$ contienen a dos lados de un paralelogramo cuyo centro es el punto M(-1,4). Calcula los vértices del paralelogramo.

37.- Halla el ángulo que forman las rectas de ecuaciones:

$$r:\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \end{cases} \qquad\qquad s:\begin{cases} x=2t \\ y=1+t \end{cases}$$

38.- Calcula el ángulo que forman las rectas:

$$r:2x-y+1=0 \qquad\qquad x+3y-5=0$$

39.- Prueba que los puntos A(-1,-2), B(0,5) y C(3,1) son los vértices de un triángulo rectángulo.

40.- Halla el valor de a para que las rectas $x+2y-1=0$ y $ax-y+3=0$ formen un ángulo de 45º

41.- Encuentra la ecuación de las rectas que pasan por el punto A(1,2) y forman un ángulo de 45º con la recta $x-3y+4=0$.

42.- La recta $x+3y=0$ es bisectriz de un ángulo de 90º y vértice (-3,1): Halla las ecuaciones de los lados del ángulo.

43.- Calcula la ecuación de la recta que es perpendicular a $2x-y+3=0$ y pasa por el punto A(3,1).

44.- Halla la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A(-1,2) y B(3,-4).

45.- La recta $2x-5y+10=0$ determina al cortar a los ejes coordenados un segmento. Calcula la ecuación de su mediatriz.

46.- Las rectas $ax+2y-6=0$ y $2x-y-2=0$ son perpendiculares y concurren en un punto con la recta $4x+by-16=0$. Halla a y b.

47.- Las rectas $3x-my=5$ y $2x+ny=7$ son perpendiculares. Calcula m y n sabiendo que la segunda pasa por P(2,-1).

48.- Calcula las coordenadas del punto simétrico del A(-1,3) respecto de la recta de ecuación $x-3y-10=0$.

49.- Por A(2,4) se traza una perpendicular a la recta $2x+y-2=0$. Halla un punto de dicha perpendicular que equidiste de A y de la recta.

50.- Halla la distancia entre los puntos A(-1,3) y B(2,-1).

51.- Dados los puntos A(-2,4) y B(6,2), ¿qué punto situado en el eje de abscisas equidista de A y de B?

52.- Halla la distancia de A(-1,4) a la recta $3x-4y+12=0$

53.- Calcula el valor de b para que la distancia de A(1,b) a la recta $3x+4y-2=0$ sea 5

54.- Determina el área del triángulo de vértices A(-2,1), B(0,2) y C(4,0).

55.- Calcula la distancia del punto P(-1,3) a su simétrico respecto de la recta de ecuación $12x+5y-6=0$.

56.- Encuentra las ecuaciones de las rectas que forman con OX un ángulo de tangente 2 y la distancia del punto P(1,1) a ellas es 1.

57.- Obtén las ecuaciones de las rectas paralelas a $2x-y+4=0$ que distan $\sqrt{20}$ del punto P(-1,3).

58.- Calcula las ecuaciones de las rectas perpendiculares a $3x+4y+2=0$ que distan 3 unidades del punto P(1,2).

59.- Halla las rectas que pasan por el punto P(0,1) y distan $\sqrt{5}$ del punto A(2,0).

60.- Encuentra la distancia que hay entre los pies de las perpendiculares trazadas desde los puntos A(0,4) y B(0,-4) a la bisectriz del primer-tercer cuadrante.

61.- Calcula el circuncentro, ortocentro y baricentro del triángulo de vértices A(-3,1), B(2,2) y C(-4,2).

62.- Dados A(1,0), B(0,2) y C(3,b), halla b para que el área del triángulo ABC sea:

a) 10 unidades cuadradas

b) 0 unidades cuadradas. ¿Qué posición ocupan, en ese caso, A, B y C.

63.- Un triángulo isósceles tiene por lado desigual el segmento que une A(1,-2) con B(6,3) y el otro vértice está sobre la recta $3x-y+8=0$. Halla las coordenadas del tercer vértice.

64.- Dos vértices opuestos de un rombo son los puntos A(3,5) y C(2,1). El vértice B pertenece al eje de abscisas. Calcula las coordenadas del cuarto vértice.

65.- El segmento AB con A(0,1) y B(2,5) es lado de un cuadrado con los cuatro vértices en el semiplano superior. Halla los otros dos vértices.

66.- A(0,2) y B(4,0) son vértices de un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa AB. Halla el tercer vértice.

67.- El lado desigual de un triángulo isósceles mide 4 y está sobre la recta $x - y = 0$. El vértice opuesto es (0,4). Halla los otros dos vértices.

68.- De un triángulo se conocen dos vértices A(1,1) y B(6,0) y su ortocentro H(3,2). Determina el tercer vértice C.

69.- La recta DA tiene de ecuación $x - y + 2 = 0$, la recta DC $y + 4 = 0$ y el punto B tiene de coordenadas (0,4). Calcula todos los vértices, los lados AB y BC y el área del paralelogramo ABCD.

PROBLEMAS DE LÍMITES DE FUNCIONES

1) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x\neq 2 \\ -2 & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$. Se pide:

a) Representa la función.

b) Calcula $f(2)$ y $f(4)$.

c) A la vista de la gráfica, obtén el valor de $\lim_{x\to 2} f(x)$ y $\lim_{x\to 4} f(x)$.

2) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{si} \quad x<1 \\ -x+4 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$. ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?

3) ¿Existe $\lim_{x\to 2} \frac{3}{x-2}$? Representa previamente la función.

4) Prueba que $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1}=2$. ¿Para qué valores de x la función se diferencia del límite menos de 0,2? ¿Y menos de 0,1? ¿Qué podemos deducir de este resultado sobre la gráfica de la función?

5) Demuestra que $\lim_{x\to 1} \frac{2}{(x-1)^2}=+\infty$. ¿Cuál es el menor entorno de 1 tal que todos sus elementos tengan imágenes mayores que 128? ¿Qué nos dice este hecho sobre la gráfica de la función?

6) Sea la función $f(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}$. Comprueba que el valor de $f(x)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera con tal de elegir un origen suficientemente próximo a –2. ¿Qué conclusión sacas sobre el valor del $\lim_{x\to -2} f(x)$? ¿Qué significado gráfico comporta este hecho?

7) Sea la función $f(x)=2x^2-1$. ¿Las imágenes toman valores infinitamente grandes a medida que los orígenes crecen infinitamente? ¿A partir de qué valor de x las imágenes son mayores que 161? ¿Cuánto valen $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$? ¿Qué información aportan estos resultados sobre la gráfica de la función $y=f(x)$?

8) Sean las funciones:

$y=\dfrac{x}{x-2}$ $\qquad y=\dfrac{x}{2-x}$ $\qquad y=\dfrac{x}{(x-2)^2}$ $\qquad y=\dfrac{-x}{(x-2)^2}$

¿Cuánto valen los límites de estas funciones si x tiende a 2? Estudia el comportamiento gráfico de estas funciones en los alrededores de $x=2$

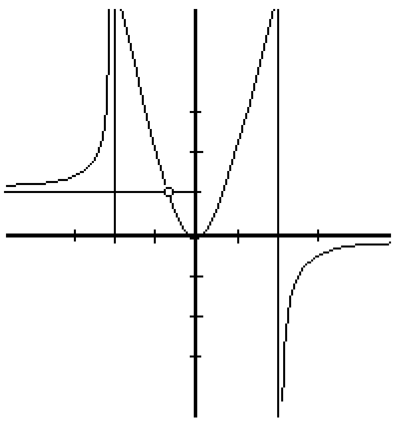
9) Dadas las funciones $f(x)=x+2$ y $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, ¿cómo serían sus gráficas?

¿Cuánto valdrían $f(2)$ y $g(2)$? ¿Cuánto valdrían $\text{lím}_{x\to2} f(x)$ y $\text{lím}_{x\to2} g(x)$?

10) Dibuja la gráfica de una función $y=f(x)$ que cumpla a la vez las siguientes condiciones: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$, $\lim_{x\to0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

11) Dibuja la gráfica de una función $y=f(x)$ que cumpla simultáneamente las condiciones siguientes: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-1} f(x)=2$, $\lim_{x\to0^-} f(x)=0$, $\lim_{x\to0^+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, no existe $f(-1)$.

12) Dada la función:



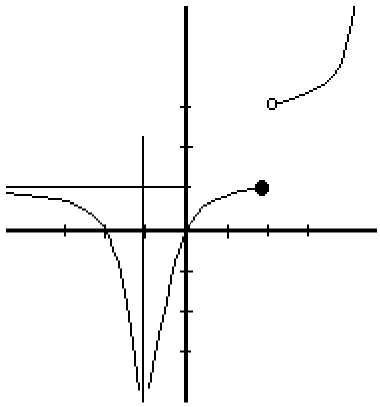
Calcula:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=$ $\qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=$

$\lim_{x\to-1} f(x)=$ $\qquad \lim_{x\to1} f(x)=$

$\lim_{x\to2^-} f(x)=$ $\qquad \lim_{x\to2^+} f(x)=$

13) Sea la función:



Halla el valor de los límites siguientes:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to-1} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$

14) Escribe la ecuación de una función que cumpla simultáneamente las condiciones:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

15) Determina la ecuación de una función que verifique a la vez las condiciones:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

16) El aumento de una lente de distancia focal 3 viene dado por $A(x) = \dfrac{3}{3-x}$, donde x representa la distancia a la que situamos el objeto observado. Representa gráficamente esta función y, a la vista de ella, explica el fenómeno que se producirá cuando x se aproxime a 3.

Calcula los siguientes límites:

17) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-1}{x^2+x+1}$

18) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}$

19) $\text{lím}_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{3x^3+2x-7}$

20) $\text{lím}_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3x^2-x^2+1}{2x^2-5}$

21) $\text{lím}_{x\to\infty} \dfrac{x^4+1}{3x^4+2x^2-5}$

22) $\text{lím}_{x\to-\infty} \dfrac{x^5+3x^2-5x+1}{2x^3-5x^2}$

23) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4-2x+1}{x^3+x-2}$

24) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{3x+5}$

25) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+\sqrt{x^4-3x+2}}{2x^2+\sqrt{x^2+2x+5}}$

26) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x}{2x+3}\right]^{3x-2}$

27) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{3x-1}{x+2}\right]^{2x-1}$

28) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{3x-1}{x+2}\right]^{2x-1}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2-2x\right)^{1-2x}$

30) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\right]^{2x-1}$

31) $\text{lím}_{x\to2} \dfrac{x}{x-2}$

32) $\text{lím}_{x\to2} \dfrac{x}{(x-2)^2}$

33) $\lim\limits_{x\to1} \left(2x^2+1\right)^{\frac{3}{(x-1)^2}}$

34) $\lim\limits_{x\to2} \left(x^2-1\right)^{\frac{-2x}{x-2}}$

35) $\lim\limits_{x\to-2} \left[\dfrac{-x}{(x+2)^2}\right]^{2x}$

36) $\lim\limits_{x\to-1} \left[\dfrac{3}{(x+1)^2}\right]^{\frac{1}{x+1}}$

37) $\text{lím}_{x\to2} \left[\dfrac{2}{(x-2)^2}\right]^{\frac{1}{x^2-4}}$

38) $\text{lím}_{x\to-\infty} \dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

39) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$

40) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{5x^2-13x-6}{x^2-9}$

41) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-3x^2-4x+12}{x^3-3x^2+4}$

42) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+4x^2+5x+2}$

43) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x^3+14x^2+20x+8}{2x^4+8x^3+7x^2-4x-4}$

44) $\lim\limits_{x\to1/3} \dfrac{3x^3-x^2+12x-4}{3x^4-x^3+3x-1}$

45) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2+x-1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

46) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{6x-3}}$

47) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

48) $\lim_{x\to 1}\frac{2x-\sqrt{x^2+4x-1}}{x^3-3x+2}$

49) $\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{x^2-3x+9}}{\sqrt{2x+3}-x}$

50) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-\sqrt{3x^2+x+2}}{\sqrt{x^3+1}-3}$

51) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+x}\right)$

52) $\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x+2}\right)$

53) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-3x+5}-3x\right)$

54) $\text{lím}_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+3}$

55) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+4}-x+1\right)$

56) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

57) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2\right)$

58) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x-1}{2x+3}\right]^{2x-1}$

59) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x-2}{3x+5}\right]^{\frac{4x^2}{3x+2}}$

60) $\lim_{x\to -1}\left[\frac{x^2+3x-5}{-1+6x}\right]^{\frac{x^2+x+2}{x^2-1}}$

61) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3-2x+2}{3x^2-2}\right]^{\frac{x^2-3x}{x^2+x-2}}$

62) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x^3-3x^2}{5x^3+4x-2}\right]^{x^2+3x-2}$

63) $\lim_{x\to 0}\left[3+\frac{x^2-2}{x+1}\right]^{\frac{2x+5}{3x}}$

64) $\text{lím}_{x\to 0}\sqrt[4x]{1+x}$

65) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1-x}{5-x}\right]^{\sqrt{x^2+2x-1}}$

66) $\text{lím}_{x\to\infty}\left[\sqrt{\frac{2x+3}{2x-1}}\right]^{3x+5}$

67) $\lim_{x \to 2} \left[\frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2} \right]^{\frac{2x^2-4x}{x^2-3x+2}}$

68) $\lim_{x \to 3} \left[\frac{1-\sqrt{x-2}}{x-3} \right]^{\frac{2x^2-6x}{x^2+6x-27}}$

69) $\lim_{x \to \infty} \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$

70) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$

71) Sabemos que la fórmula que nos da el capital final C obtenido al imponer c euros a interés compuesto durante t años es: $C = c(1+r)^t$, donde r es el tanto por uno. Si en lugar de capitalizar en años se capitaliza en semestres, la fórmula resulta ser $C = c\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}$. ¿Cuál sería la fórmula si se capitaliza en trimestres? ¿Y en meses? ¿Y en días? ... ¿Y si la capitalización se hiciera de forma instantánea y continua?

PROBLEMAS DE CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Indica si son continuas o no las funciones siguientes en los puntos que se indican:

1) $y = x^2 - 3x + 2$ en $x = 1$

2) $y = \dfrac{2}{x-3}$ en $x = 3$

3) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$ en $x = -1$

4) $y = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$ en $x = 2$

5) $y = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -x + 5 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$ en $x = 3$

6) $y = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si} \quad x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$ en $x = 3$ y $x = 2$

7) $y = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{x+2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ en $x = -2$, $x = -1$ y $x = 0$

Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

8) $y = x^2 + 3x - 2$

9) $y = \dfrac{1}{x-2}$

10) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x+2}$

11) $y = \dfrac{x-1}{x^2 + 3x - 4}$

12) $y=\begin{cases} 2x-7 & \text{si} \quad x\neq 1 \\ 5 & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$

13) $y=\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-3} & \text{si} \quad x\neq 1 \\ -2 & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$

14) $y=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x-5 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

15) $y=\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si} \quad x<0 \\ 2x+3 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

16) $y=\begin{cases} \dfrac{2x}{x-2} & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{x}{x+2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

17) $y=\begin{cases} \dfrac{x+3}{x+2} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{2x-1}{x-1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

18) $y=|3x-6|$

19) $y=x^2-|2x|$

20) $y=\dfrac{2x}{|x|-1}$

21) $y=\dfrac{|x-2|}{|x|+1}$

22) $y=\dfrac{x}{e^x-1}$

23) $y=\dfrac{x-1}{\ln x}$

24) $y=\operatorname{tag}(2x)$

25) $y=x\sec x$

26) $y=\begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2} & \text{si} \quad 0<x<2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

27) $y=\begin{cases} e^{x-1} & \text{si} \quad x<1 \\ 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

28) $y=\begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2+2x-3} & \text{si} \quad x\neq -3,1 \\ -1/4 & \text{si} \quad x=-3 \\ 0 & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$

29) $y=\operatorname{Ent}(2x)$

30) Sea una función $y = f(x)$ continua, definida para todo número real y de modo que si $x \neq 1$, su ecuación es $f(x) = \dfrac{5-\sqrt{24+x}}{x-1}$. Halla razonadamente $f(1)$

31) Esboza la gráfica de una función $y = f(x)$ que posea una discontinuidad evitable en $x = 2$ y una discontinuidad inevitable asintótica en $x = 1$, tal que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$. Obtén la expresión analítica de una de las funciones que cumplen estas condiciones.

32) Dibuja la gráfica de una función $y = f(x)$ que verifique, simultáneamente, las siguientes condiciones:

– $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$

– Tenga una discontinuidad evitable de salto finito igual a 1 en $x = 1$

– $f(1) = 0$

– Exista una discontinuidad inevitable asintótica en $x = 3$

– $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \infty$

Escribe la expresión analítica de una de estas funciones.

33) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ kx & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$. Calcula k para que la función sea continua en todo su dominio.

34) Halla el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2-13x-6}{x^2-9} & \text{si} \quad x \neq 3 \\ 2k+1 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$ sea continua en $x = 3$.

35) Averigua el valor de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} 2ax+3 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ x^2-bx & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ sea continua en todo su dominio.

36) Encuentra el valor de a y b para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+b & \text{si} \quad x<-1 \\ bx-2a & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ -4ax & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

sea continua en todo su dominio.

37) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si} \quad x\le -1 \\ \dfrac{ax}{x+2} & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$ Calcula a y b sabiendo que es continua y que $f(-2)=f(-2/3)$

38) Sea la función: $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x<-\dfrac{\pi}{2} \\ m\cdot \operatorname{sen} x+n & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 2\cos x & \text{si} \quad x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Calcula m y n para que la función sea continua para todo número real

39) Averigua el valor que deben tomar a y b para que la función:

$$y=\begin{cases} e^{x-a} & \text{si} \quad x\le 2 \\ 2x+b & \text{si} \quad 2<x<4 \\ (a+3)+\ln(x+b) & \text{si} \quad x\ge 4 \end{cases}$$

sea continua en todo su dominio.

40) Demuestra que la ecuación $x^3-3x^2-x+5=0$ tiene al menos una raíz en (–2,–1)

41) Encuentra un intervalo que tenga como extremos números enteros consecutivos y tal que en él se encuentre una raíz de la ecuación $x^3+2x^2-5x+4=0$

PROBLEMAS SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA.

1.- Consideremos la función $y=-x^2+6x$. Queremos hallar la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$. Para ello procederemos del siguiente modo:

a) Calcula la pendiente de la recta secante determinada por los puntos de abscisas $x=1$ y $x=3$.

b) Repite el proceso para los puntos de abscisas $x=1$ y $x=2$

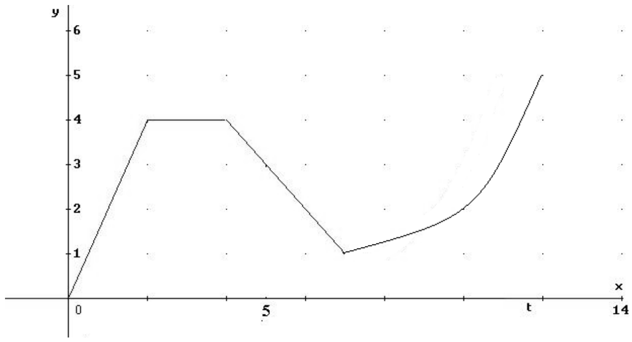
c) Repite el proceso para los puntos de abscisas $x=1$ y $x=1{,}5$

Reiterando este procedimiento aproximando cada vez más el segundo punto al de abscisa $x=1$, ¿hacia qué valor tiende la pendiente?

¿Cómo obtendrías el resultado que buscamos sin repetir el proceso?

2.- Sea un móvil cuya ecuación espacio-tiempo es $e=\frac{3}{2}t^2+2t$ (*e* en metros y *t* en segundos) ¿Cuál es la velocidad media entre $t=2$ y $t=4$? y ¿entre $t=2$ y $t=3$? ¿Cómo calcularíamos la velocidad instantánea del móvil en $t=2$? ¿Cuál sería la velocidad instantánea del móvil en el instante genérico *t*? ¿En qué momento la velocidad instantánea es de 15 m/sg? ¿Cuál es la aceleración del móvil en un instante *t*?

3.- La función *s(t)* de la figura representa la posición de un móvil en cada instante de tiempo *t* (se mide *s* en metros y *t* en segundos)



a) ¿Dónde se encuentra el móvil cuando $t=3$? , ¿y cuando $t=10$?

b) ¿Qué velocidad lleva en el instante $t=1$? , ¿y en $t=2{,}5$? , ¿y en $t=6$?

c) ¿Durante qué intervalo de tiempo está detenido el móvil?

d) ¿Durante qué intervalo tiene aceleración no nula?

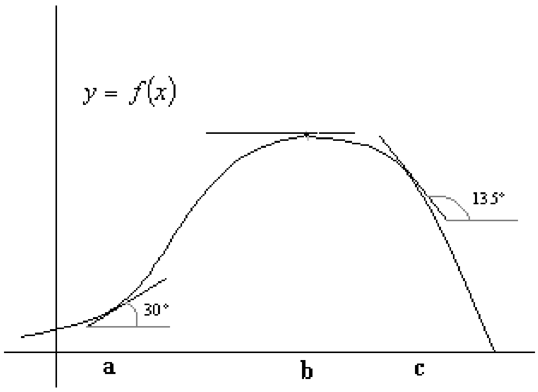
e) En el instante $t=7$ cambia el signo de la derivada $s'(t)$; ¿qué significado físico tiene este hecho?

4.- Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $y=-x^2+1$ en el punto de abscisa $x=2$.

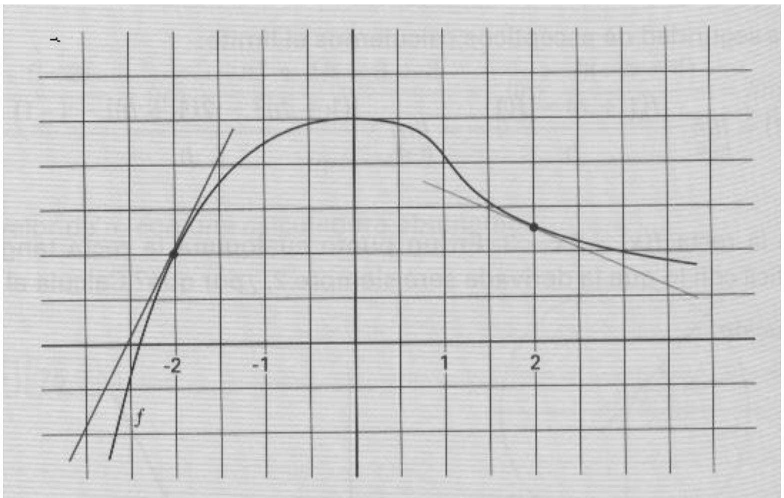
5.- Halla la derivada de $f(x)=x^2-x-2$ en $x=-1$

6.- Representa la función $f(x)=x^2-2x$. Sin hacer ningún cálculo indica el valor de $f'(1)$.

7.- Determina $f'(a)$, $f'(b)$ y $f'(c)$ en la función cuya gráfica es:



8.- Calcula sobre la gráfica $f'(-2)$ y $f'(2)$



9.- Calcula las derivadas de:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ en $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi / 6$

10.- Calcula el valor de k en $f(x) = kx^2$ de modo que $f'(3) = 4$

11.- Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$

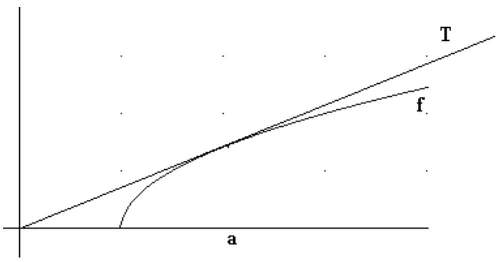
12.- La parábola $y = \dfrac{-x^2}{2} + 1$ es simétrica respecto del eje *OY* y cabe esperar que las rectas tangentes en $x = 2$ y $x = -2$ se corten en un mismo punto del eje *OY*. Confírmalo.

13.- Calcula la derivada de $y = x^2$ en un punto genérico de abscisa $x = p$. Utiliza la expresión hallada para calcular las derivadas de esa función en $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 0{,}5$ y $x = 1$.

14.- Sea $y = x^3$. Busca un punto donde la recta tangente sea paralela a la bisectriz del primer-tercer cuadrante.

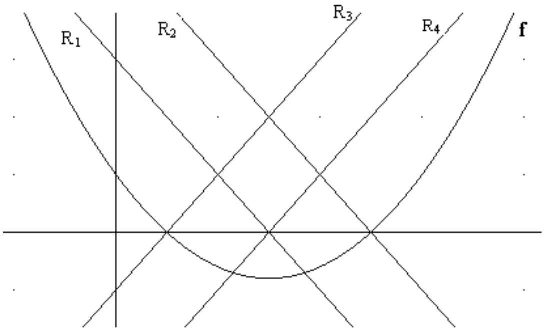
15.- Halla un punto de la función $f(x) = 2x^2 - x$ forme con el eje *OX* un ángulo de 60º.

16.- $f'(a) = 2/3$. Halla la ecuación de la recta T

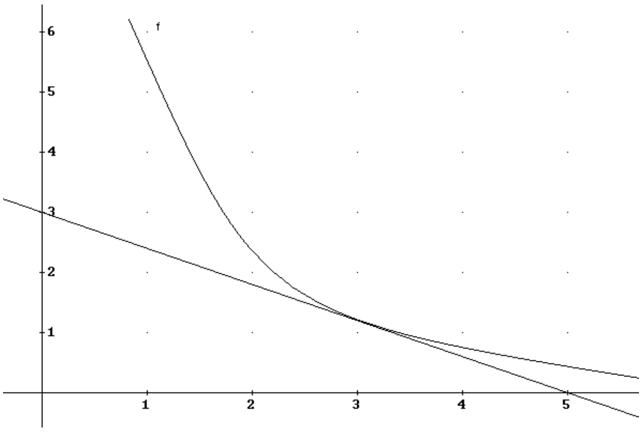


17.- ¿Qué puedes decir sobre $f'(a)$ si sabes que la función es estrictamente creciente en a?

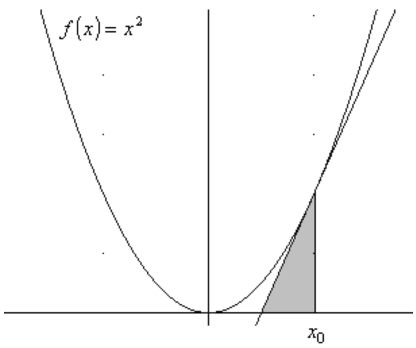
18.- De las tres rectas de la figura, una es la gráfica de la derivada de *f*. Determínala.



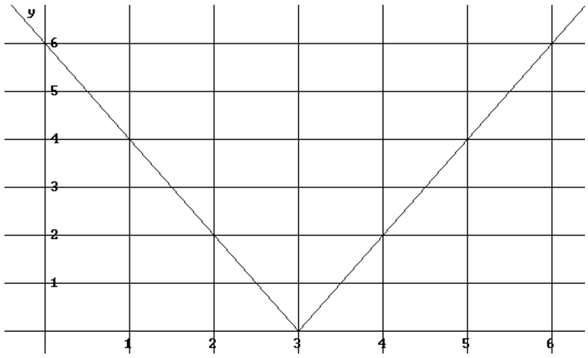
19.- Halla $f'(3)$



20.- El área del triángulo sombreado que subtiende la tangente con *OX* depende de x_0. Busca una expresión que proporcione dicha área en función de x_0.



21.- Escribe y representa la función derivada de:



22.- Traza la gráfica de $y = |x-4|$ e indica en qué punto la función no es derivable. Constátalo ahora utilizando la definición.

23.- Traza la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

¿Existe $f'(1)$?

24.- ¿Qué gráfica tiene la función $y = |1-|x||$? ¿En qué puntos no es derivable? En esos puntos ¿es continua?

25.- La función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

¿es continua en $x = 1$? ¿Es derivable en ese punto?

26.- Averigua el valor de k para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} kx-5 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2-3x-5 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

sea derivable en todo su dominio.

27.- Calcula a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^2 - 2bx + a & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en todo número real.

CÁLCULO DE FUNCIONES DERIVADAS

Encuentra la función derivada de las siguientes funciones:

1.- $y = 5x^3 - 4x^2$

2.- $y = x^2(3x-2)$

3.- $y = (x^2+3)\cdot(x^2-x-1)$

4.- $y = x^2(x+1)(x^3-3)$

5.- $y = \dfrac{3x^2-6}{x^3-3x}$

6.- $y = \dfrac{x^3-5x+2}{x(x+3)}$

7.- $y = (x^2-1)\operatorname{sen} x$

8.- $y = e^x \cdot \operatorname{tag} x$

9.- $y = 2^x \cos x$

10.- $y = (2x^2+2x-1)\cdot \ln x \cdot \cos x$

11.- $y = (x^2-3x+1)^3$

12.- $y = e^{2x-3}$

13.- $y = \ln\left(2x^3 \operatorname{sen}(2x-2)\right)$

14.- $y = \sqrt{4x+3}\,(3x^2-1)$

15.- $y = \ln\sqrt{x^2-2x}$

16.- $y = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

17.- $y = x\cdot\ln(x^2-1)$

18.- $y = \dfrac{e^{3x}-1}{e^{2x}+1}$

19.- $y = 4^{x^2+3x-2}$

20.- $y = \operatorname{sen}(5x)$

21.- $y = 3\operatorname{sen}(2x)$

22.- $y = 2\operatorname{sen}^2(3x)$

23.- $y = 3\operatorname{sen}^2(2x^2)^3$

24.- $y = \operatorname{cotag}(3x^2-2x)^4$

25.- $y = \cos^4\sqrt{x^2-3x+1}$

26.- $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{x^2+3x}$

27.- $y = \operatorname{arctag}\left(2x\cdot\ln^2(x^2-1)\right)$

28.- $y = \operatorname{arctag}\left(e^{3x}\cdot\sqrt{x^2-1}\right)$

29.- $y = \ln\left(\ln\sqrt{x\cdot\operatorname{sen}(2x)}\right)$

30.- $y = \ln\left(\operatorname{sen}\sqrt{x\cdot e^{2\operatorname{tag}x}}\right)$

31.- $y = \operatorname{arctag}\dfrac{1+x}{1-x}$

32.- $y = \ln\sqrt{\cos^3(2x-5)}$

33.- $y = x^x$

34.- $y = x^{\cos x}$

35.- $y = (\operatorname{sen}(3x))^{\operatorname{tag}x}$

36.- $y = 2(\ln x)^{\operatorname{tag} x}$

37.- $y = x^x + x^{\frac{1}{x}}$

38.- $y = 3(\operatorname{arcsen} x)^{2x-1}$

39.- $y = (2x^2-1)\cdot x^{2x-3}$

40.- $y = x^{3x-2}\cdot\arccos(x^3+x\cdot\ln x)$

Las derivadas siguientes pueden simplificarse mucho. Deriva y, posteriormente, simplifica lo más posible la función resultante

41.- $y = \operatorname{arctag} \dfrac{x+a}{1-ax}$

42.- $y = \ln\left[\operatorname{tag}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right]$

43.- $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2-1}}$

44.- $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

45.- $y = \ln \dfrac{1+\operatorname{tag}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tag}\frac{x}{2}}$

46.- $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctag} x + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$

47.- $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tag}\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}$

48.- $y = \ln\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}}$

49.- $y = \ln\sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \dfrac{a}{b}\operatorname{arctag}\dfrac{x-a}{b}$

50.- ¿Qué valor toman las derivadas de las funciones siguientes en los puntos que se indican:

a) $y = \operatorname{tag}^2(2x)\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}$ en $x = \dfrac{\pi}{3}$

b) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctag} x + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$ en $x = 1$

51.- Calcula las cuatro primeras derivadas de la función $y = \operatorname{tag} x$ expresándolas en función de $\operatorname{tag} x$.

52.- Calcula las derivadas n-simas de las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ b) $y = a^x \ln a$

c) $y = \operatorname{sen} x$ d) $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DERIVADAS

1.- Dada la curva $y = x^3 - 2x^2$ Halla la ecuación de la tangente a dicha curva en el punto de abscisa 1, así como el otro punto común de esa tangente con la curva.

2.- Calcula la ecuación de las tangentes y normales a la curva $y = 2x^3 - 9x^2 - 5x - 2$ en los puntos cuya ordenada es igual a -2.

3.- Encuentra las ecuaciones de las tangentes a la curva $2x^2y + y^2 - 5y + x + 6 = 0$ en los puntos de abscisa 0.

4.- Averigua las ecuaciones de las rectas que tienen una inclinación de 45º y son tangentes a la curva $y = \frac{x+1}{x^2}$.

5.- Dadas las curvas $xy = 1$, $y^2 = 4x + 2$, halla el ángulo que forman dichas curvas en sus puntos de intersección. Representa gráficamente el problema.

6.- Dada $y = x^2 + 3x + 1$, encuentra la ecuación de la tangente a la curva que sea paralela a la recta $y = 2x$.

7.- Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 - 4x + 1$ que es perpendicular a la recta $2x - y - 5 = 0$.

8.- Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a $y = \cos(3x)$ que sean paralelas a la recta $6x - 2y + 7 = 0$ en el intervalo $(0, 2\pi)$. Representa gráficamente el problema.

9.- Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 2\ln x$ que sean perpendiculares a la bisectriz del 2º-4º cuadrante. Representa gráficamente el problema.

10.- Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y=(x-1)^2$ que pasan por el origen de coordenadas.

11.- Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y=e^{2x}$ trazada desde el origen de coordenadas.

12.- Halla el valor de k de modo que la recta $x-y+k=0$ sea tangente a la elipse de ecuación: $x^2+2y^2=4$.

13.- Obtén las normales a la hipérbola equilátera $xy=8$ paralelas a la recta $2x-y+1=0$.

14.- Halla las tangentes a la parábola $y^2=4x$ trazadas desde el punto $P(-3,0)$.

15.- Averigua las ecuaciones de las normales a la elipse $2x^2+y^2=8$ trazadas desde el punto $P(2,4)$.

16.- Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento estricto de las funciones siguientes:

a) $y=x^3-2x^2-3$ b) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ c) $y=x\cdot e^{2x}$

d) $y=\cos^2 x$ e) $y=2x-\cos x$ f) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

17.- Averigua los extremos relativos de las funciones siguientes indicando si son máximos o mínimos

a) $y=3x^2-2x^3$ b) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$

d) $y=(x+1)^2e^{-x}$ e) $y=x^2-2\ln x$

f) $y=2\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}(4x)$

18.- Encuentra los extremos relativos de la función siguiente realizando además su clasificación: $2x^2+3y^2-8x+8y-4xy-1=0$

19.- Halla, tanto los máximos y mínimos relativos como los absolutos de la función de ecuación $y = 4x^3 - 8x^2 + 5x$ en el intervalo $[0,2]$.

20.- Busca los intervalos de concavidad y convexidad de las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ b) $y = x - \operatorname{sen} x$

c) $y = \left(1 + x^2\right) \cdot e^x$

21.- Calcula los puntos de inflexión y las ecuaciones de las tangentes en ellos, de las curvas siguientes:

a) $y = x^3 - 6x^2 + x + 4$ b) $y = \operatorname{arctag} x - x$

22.- Halla los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad, así como los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la curva $y = (x+1)^4$.

23.- Calcula el valor de a para que la función $y = \dfrac{ax}{2x^2 - a}$ tenga un mínimo para $x = 2$.

24.- Calcula a y b para que la función $y = ax^3 + bx^2 - 2x + 1$ tenga dos extremos relativos en $x = -2$ y en $x = 3$.

25.- Averigua el valor de a, b, c y d para que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo y un mínimo relativo en $(0,4)$ y $(2,0)$ respectivamente.

26.- Encuentra el valor de a, b y c para que la función $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo en $x = -4$, un mínimo en $x = 0$ y tome el valor 1 para $x = 1$.

27.- Halla a, b, c y d para que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en $(-1,10)$ y un punto de inflexión en $(1,-6)$.

28.- Calcula a, b, c y d sabiendo que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pasa por el punto $(0,-2)$ y en el punto $(-2,6)$ existe un punto de inflexión con tangente paralela a la recta $y = -8x - 10$

29.- Encuentra dos números sabiendo que suman 18 y su producto es máximo.

30.- Descompón el número 20 en dos sumandos tales que la suma de siete veces el cuadrado del primero más tres veces el cuadrado del segundo sea mínima.

31.- La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 20 cm. Halla sus valores para que el área sea máxima.

32.- Entre todos los rectángulos de área igual a 36 cm^2, encuentra el de perímetro mínimo.

33.- El perímetro de u rectángulo es de 8 cm. Halla las dimensiones del rectángulo para que el área de la figura obtenida al sustituir los lados por semicircunferencias sea mínima.

34.- Encuentra las dimensiones del cuadrado de mayor y menor área que puede inscribirse en un cuadrado de lado 8 cm.

35.- Halla las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en un triángulo isósceles de 10 cm de base y 8 cm de altura.

36.- Entre todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de radio 12 cm, calcula las dimensiones del que tenga mayor área.

37.- Un depósito cerrado cuya forma es la de un ortoedro de base cuadrada tiene un volumen de 125 dm^3. Calcula la longitud que deben tener sus aristas para que el coste de la chapa necesaria para construir el depósito sea el menor posible.

38.- De todos los conos con la misma generatriz, $g=\sqrt{3}$, halla el volumen del que lo tiene máximo.

39.- Averigua las dimensiones del cono de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio 9 cm.

40.- Un segmento mide 30cm. Divídelo en dos partes de tal modo que, al construir con cada una de ellas un triángulo equilátero, la suma de las áreas de dichos triángulos sea mínima.

41.- Una ventana está formada por un rectángulo cuyo lado superior se ha sustituido por un triángulo isósceles cuya altura vale 3/8 de su base. Sabiendo que la medida de su perímetro es 90 dm., determina las dimensiones de la ventana para que el flujo de luz sea máximo.

42.- Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm cada uno y los laterales de 1 cm. Calcular las dimensiones de las hojas para que el gasto de papel sea mínimo.

43.- Dado el punto $P(2,3)$, encuentra la ecuación de la recta que, pasando por él, determina con los semiejes coordenados positivos un triángulo de área mínima.

44.- Halla un punto sobre el eje de abscisas de tal manera que la suma de los cuadrados de distancias a los puntos $A(0,6)$ y $B(8,0)$ sea mínima.

45.- De todos los puntos de la recta $3x-4y+2=0$, halla el que diste menos del punto $P(-1,1)$.

46.- Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse entre la curva $x^2=8y$ y la recta $y=4$.

47.- Un propietario puede alquilar sus 40 apartamentos a 500 € mensuales. Observa que por cada 25 € de aumento en el precio del alquiler, alquila un apartamento menos. ¿Qué alquiler debe cobrar para obtener la máxima ganancia?

48.- Una herencia de C pesetas se ha de repartir entre dos personas de modo que los derechos reales sea mínimos (los derechos reales correspondientes a una renta x son $d(x) = k \cdot e^{x-1}$ donde k es una constante). ¿Cómo debe hacerse la partición?

49.- Determina el punto de la función $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el que la tangente a la misma forme el mayor ángulo agudo posible con el eje de abscisas.

50.- Un jugador de fútbol tiene que lanzar el balón sobre la portería contraria. A este jugador le está permitido elegir el sitio exacto del lanzamiento de tal modo que sea sobre la línea de banda. ¿Cuál será el sitio más conveniente? (Datos: $a =$ anchura de la portería, $b =$ anchura del campo)

51.- Las manecillas de un reloj miden 2 y 3 cm. Si se unen sus extremos se forma un triángulo. Indica la hora, entre las 12 y las 12 y media, en la que el triángulo tiene área máxima.

52.- A un espejo rectangular de 15 dm de alto y 10 dm de ancho se le ha roto en una esquina un trozo de forma triangular de modo que la altura ha disminuido en 5 dm y la anchura en 3 dm. Halla las dimensiones del mayor espejo rectangular que puede formarse con la parte que había quedado.

53.- Consideramos un cono equilátero inscrito en una esfera de radio 15 cm. Calcula a qué distancia del vértice hay que trazar un plano perpendicular al eje del cono para que el área de la corona circular comprendida entre el cono y la esfera sea máxima.

54.- Encuentra las dimensiones del cilindro de mayor área total que puede inscribirse en un cono de 5 dm de radio y 3 dm de altura.

Representa las funciones de ecuaciones:

55.- $y = x^4 - x^2$

56.- $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

57.- $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

58.- $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}$

59.- $y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}$

60.- $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

61.- $y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$

62.- $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

63.- $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

64.- $y = \frac{x}{1 - x^2}$

65.- $y = \frac{x^3}{(x - 1)^2}$

66.- $y = \dfrac{x}{\ln x}$

67.- $y = x \cdot \ln x - 2x$

68.- $y = \dfrac{\ln x}{x}$

69.- $y = x \cdot e^{x}$

70.- $y = x^{2} \cdot e^{-x}$

71.- $y = e^{-x^{2}}$

72.- $y = \dfrac{2^{x} - 1}{2^{x} + 1}$

73.- $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

74.- $y = \sqrt{x^{2} - 1}$

75.- $y = (x-2)^{2/3}$

76.- $y = \operatorname{sen} x - \cos x$

77.- $y = \operatorname{sen}^{2} x$

PROBLEMAS SOBRE CÓNICAS

Circunferencia

1.- Halla la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(2,-3)$ y su radio es igual a 3.

2.- Calcula la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(1,-1)$ sabiendo que pasa por el punto $P(2,0)$.

3.- Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento de extremos $A(2,-1)$ y $B(-4,3)$.

4.- Calcula la ecuación general de la circunferencia que es tangente a la recta $3x-4y+5=0$ y tiene su centro en $C(1,-2)$.

5.- Averigua el centro y el radio de la circunferencia de ecuación general $x^2+y^2-6x+2y-6=0$.

6.- Escribe la ecuación de la circunferencia concéntrica a la de ecuación general $x^2+y^2-2x-4y-1=0$ sabiendo que pasa por el punto $A(1,5)$. ¿Cuánto mide el radio de esta última circunferencia?

7.- Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación general $9x^2+9y^2-6x+18y-125=0$.

8.- Indica cuáles de las siguientes ecuaciones representan una circunferencia:

a) $x^2+y^2-2x+6y-4=0$ b) $x^2+y^2-1=0$ c) $x^2+y^2+1=0$

d) $x^2+y^2-2x=0$ e) $x^2+y^2-2x+4y+6=0$

9.- Consideramos el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(8,0)$ y $C(2,6)$. Se pide:

a) Ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

b) Ecuación de la circunferencia que contiene a los puntos medios de los tres lados del triángulo.

10.- Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,1)$ y $B(-2,3)$ y tiene su centro en la recta $x+y+4=0$.

11.- Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(3,5)$ y es tangente a la recta $x-3y+2=0$ en el punto $Q(1,1)$.

12.- Calcula la ecuación de la circunferencia concéntrica a la de ecuación general $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ sabiendo que es tangente a la recta $3x+4y+10=0$

13.- Averigua la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{2}$ que pasa por el origen de coordenadas y tiene su centro en la bisectriz del primer-tercer cuadrante.

14.- Averigua la longitud de la cuerda que determina la recta $x+y-3=0$ sobre la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y+1=0$.

15.- Se da la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=16$ y la recta $y=4x+8$. Halla la ecuación de la mediatriz de la cuerda determinada por la circunferencia y la secante.

16.- El punto $P(2,2)$ es el punto medio de una cuerda de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=16$. Halla la ecuación de la recta a la cual pertenece dicha cuerda así como la longitud de dicha cuerda.

17.- Encuentra la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(0,1)$ y $B(0,5)$ y es tangente al eje de abscisas.

18.- Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen, por el punto $P(5,0)$ y es tangente a la recta $y=7$.

19.- Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(4,-2)$ y es tangente a los ejes coordenados.

20.- Halla la ecuación de la tangente y de la normal a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-4x+4y=0$ en el punto $P(4,0)$.

21.- Dada la circunferencia $x^2+y^2=1$, encuentra la ecuación de las tangentes a dicha circunferencia paralelas a la recta $4x+3y-12=0$. Resuelve el mismo problema para buscar las tangentes a la circunferencia perpendiculares a la recta $4x+3y-12=0$.

22.- Dada la circunferencia $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, calcula las tangentes a dicha circunferencia trazadas desde el punto $P(8,-3)$.

23.- Calcula las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=4$ que forman un ángulo de 30º con el sentido positivo del eje de abscisas.

24.- Halla la potencia de los puntos $A(0,3)$, $B(2,1)$ y $C(-3,2)$ respecto de la circunferencia $x^2+y^2-2x-9=0$. A partir de este valor, indica la posición relativa de dichos puntos respecto de la circunferencia.

25.- Averigua la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que tienen potencia 34 respecto de la circunferencia $x^2+y^2+4x+2=0$.

a) ¿Qué representa esta ecuación?

b) Indica si existe alguna relación geométrica entre el lugar y la circunferencia.

26.- Calcula el eje radical de las circunferencias de ecuaciones:

$$x^2+y^2=3 \qquad\qquad x^2+y^2-5x+y-3=0$$

27.- Halla el centro radical de las circunferencias:

$x^2 + y^2 - 4y = 0$ $\qquad (x-3)^2 + (y+4)^2 = 1$ $\qquad x^2 + y^2 = 4$

Elipse

28.- Averigua los semiejes, vértices, focos y excentricidad de las siguientes elipses:

$\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ $\qquad 25x^2 + 9y^2 = 225$ $\qquad x^2 + 4y^2 = 9$

Encuentra la ecuación de la elipse (suponiendo que tiene su centro en el origen de coordenadas y sus focos en el eje de abscisas) en los siguientes casos (problemas 29-33)

29.- Su distancia focal es 16 y su excentricidad 4/5

30.- Su semieje mayor es 9 y pasa por el punto $P(6,4)$

31.- La excentricidad es $1/2$ y pasa por el punto $P(1,3)$

32.- El eje menor mide 10 y pasa por el punto $P(8,3)$

33.- Los radio vectores de un punto son 2 y 8 y uno de sus focos es $F(3,0)$

34.- Halla la ecuación de una elipse de focos $F(1,1)$ y $F´(-1,1)$ siendo la longitud del eje mayor 4.

35.- Los puntos $P(0,0)$ y $Q(2,4)$ son los focos de una elipse y el punto $D(3,4)$ pertenece a la misma. ¿Cuál es su ecuación?

36.- Halla las ecuaciones de los radios vectores del punto de abscisa 3 y ordenada positiva perteneciente a la elipse: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

37.- Dada la elipse de ecuación $x^2+2y^2=6$, halla el punto cuya ordenada es doble que su abscisa y calcula la longitud de los radios vectores de ese punto.

38.- Inscribe en la elipse de ecuación $x^2+2y^2=6$ un rectángulo de lados paralelos a los ejes que tenga un perímetro de 12 unidades.

39.- Dada la elipse de ecuación $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ calcula la longitud de la cuerda que contiene uno de los focos y es perpendicular a la recta determinada por los mismos.

40.- Averigua la posición relativa de la recta $2x+y-1=0$ y la elipse $2x^2+y^2=3$.

41.- Halla los valores de n para los cuales la recta $x-2y-n=0$ es 1º) secante, 2º) tangente, 3º) exterior a la elipse $3x^2+2y^2=21$

42.- Calcula la ecuación de una elipse de eje mayor 8 tangente a la recta $x-y+5=0$

43.- Encuentra las ecuaciones de las tangentes y normales a la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ en los puntos de abscisa 1.

44.- Halla las ecuaciones de las tangentes a la elipse $x^2+4y^2=25$ paralelas a la recta de ecuación $3x+8y-1=0$

45.- Obtén las ecuaciones de las tangentes a la elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ que forman un ángulo de 45º con la dirección positiva del eje de abscisas.

46.- Calcula la ecuación de una elipse que pasa por el punto $P(2,0)$ y es tangente a la recta $x+2\sqrt{3}y=4$

47.- Halla las ecuaciones de las tangentes a la elipse $x^2+4y^2=4$ trazadas desde el punto $P(0,3)$.

Hipérbola

48.- Averigua los semiejes, vértices, focos y excentricidad de las siguientes hipérbolas:

$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ $\qquad x^2-4y^2=9$ $\qquad 16y^2-9x^2=1$

49.- Encuentra la ecuación de la hipérbola (suponiendo que tiene su centro en el origen de coordenadas y sus focos en el eje de abscisas) en los siguientes casos:

a) Su distancia focal es 30 y su eje real mide 24

b) Su eje real mide 12 y pasa por el punto $P(-10,4)$

c) Uno de sus focos es $F(7,0)$ y su excentricidad es 7/6

d) Pasa por los puntos $P(5,2)$ y $Q(9,3\sqrt{2})$

e) Pasa por el punto $P(\sqrt{5}/2,1)$ y una de sus asíntotas es $y=2x$

f) Los radios vectores de un punto son 2 y 6 y uno de sus focos es $F(8,0)$

50.- Halla el valor de a para que $ax^2-9y^2=4$ represente una hipérbola equilátera y halla sus vértices y su excentricidad. ¿Cuál sería su ecuación referida a sus asíntotas?

51.- Escribe la ecuación de la hipérbola equilátera $xy=8$ referida a los ejes coordenados. Halla las coordenadas de sus focos y de sus vértices.

52.- Se llama parámetro de una hipérbola a la medida de la cuerda perpendicular al eje focal que pasa por el foco. Prueba que en la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

el parámetro vale $\frac{2b^2}{a}$.

53.- Halla los elementos característicos de una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas que pasa por el punto $P(4,2)$

54.- Calcula las ecuaciones de las tangentes y normales a la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ en los puntos de abscisa 5

55.- Encuentra las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$ paralelas a la recta $y=2x-6$

56.- Prueba que el área del triángulo limitado por una tangente cualquiera a la hipérbola $xy=8$ con los ejes coordenados es constante.

57.- Halla las rectas tangentes a la hipérbola con un vértice en $(2,0)$ y un foco en $\left(-\sqrt{7},0\right)$ que sean perpendiculares a la bisectriz del 2º cuadrante.

58.- Prueba que la recta $3x-2y-4=0$ es tangente a la hipérbola $3x^2-4y^2=8$. Halla la normal a la curva en el punto de contacto y el área del triángulo que forman estas dos rectas y el eje de abscisas.

59.- Calcula las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2-y^2=2$ trazadas desde el punto $P(1,0)$

59.- Encuentra las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $xy = 8$ trazadas desde el punto $P(0,2)$

Parábola

60.- Calcula el foco, vértice, eje y directriz de las siguientes parábolas:

$y^2 = -8x$ $\quad\quad$ $y^2 + 6y - 8x - 31 = 0$

$x^2 - 4x - 4y = 0$ $\quad\quad$ $2x^2 + 2x + y - 1 = 0$

61.- Halla la ecuación de la parábola que cumple:

a) Su directriz es $x = 4$ y su foco $F(2,-1)$

b) Su foco es $F(6,3)$ y su vértice $V(4,3)$

c) Tiene por directriz la recta $y = -2$ y por vértice $V(4,1)$

d) Pasa por los puntos $P(6,1)$, $Q(16,6)$ y $T(-2,3)$ y es de eje horizontal.

e) Su vértice es $V(2,3)$, pasa por el punto $P(-1,0)$ y es de eje vertical.

62.- Averigua la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(2,3)$ y cuya directriz es la recta $y = x$.

63.- Dada la parábola $y^2 = 4x$ determina un segmento cuyos extremos estén en ella y cuyo punto medio sea $M(2,2)$.

64.- Dada la parábola $y^2 = 4x$, determina el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos de secante que pasan por el foco.

65.- Halla las ecuaciones de las tangentes y normales a la parábola $y^2 = 8x$ en los puntos de abscisa 2

66.- Encuentra la ecuación de la tangente a la parábola $x = 3y^2 - 2y + 1$ en el punto de ordenada 1

67.- Halla las tangentes a la parábola $y^2 = 10x$ que sean paralelas a la recta $x - 2y + 5 = 0$

68.- Obtén la ecuación de una parábola de eje vertical, que pasa por $O(0,0)$, $A(2,3)$ y la tangente en A es perpendicular a $x + y = 0$

69.- Halla las tangentes a la parábola $y^2 = x$ trazadas desde el punto $P(-1,0)$

PROBLEMAS DE COMBINATORIA

1.- Con las letras de la palabra ÁRBOL, ¿cuántas palabras distintas pueden formarse? ¿Cuántas de ellas tienen las dos vocales juntas? ¿Cuántas de ellas tienen alternadas las vocales y las consonantes?

2.- Una guardia de un hospital está formada por dos médicos y 4 enfermeras. Si disponemos de 8 médicos y 20 enfermeras para realizar las guardias, ¿cuántas guardias diferentes pueden hacerse?

3.- Disponemos de las cifras 0, 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes pueden formarse? ¿Cuántos de ellos están comprendidos entre 200 y 400? ¿Cuántos son múltiplos de 5? ¿cuántos están formados exclusivamente por cifras pares?

4.- Al tirar una moneda 8 veces han salido 5 caras y 3 cruces. ¿de cuántas maneras puede haberse llegado a este resultado?

5.- Suben 7 personas en un ascensor que se para en 4 pisos, en los que bajan las 7 personas. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse las 7 personas en los 4 pisos?

6.- Tenemos 7 fichas y 3 cajas; las fichas no se distinguen entre sí, pero sí las cajas. ¿De cuántas maneras distintas pueden distribuirse las fichas en las cajas?

7.- Tenemos 7 fichas y 3 cajas. Tanto las fichas como las cajas se distinguen entre sí. ¿De cuántas maneras puedo distribuir las fichas en las cajas?

8.- Disponemos de 3 libros de Matemáticas y 4 de Física. ¿De cuántas maneras podemos colocarlos en una estantería? ¿De cuántas maneras si deseamos que estén juntos los de la misma especialidad? ¿De cuántas maneras si únicamente exigimos que estén juntos los de Física?

9.- Las guardias de un cuartel las realizan 4 soldados. Disponemos de 18 soldados para realizar la guardia. ¿Cuántas guardias distintas pueden formarse? ¿En cuántas de ellas está el soldado A? ¿En cuántas está el soldado A pero no están ni el soldado B ni el C?

10.- Con las letras de la palabra PRADOS, ¿cuántas palabras de 4 letras pueden formarse? ¿Cuántas empiezan por P? ¿Cuántas empiezan por P y acaban por vocal? ¿Cuántas empiezan por consonante y acaban por vocal? ¿Cuántas empiezan y terminan por consonante? ¿Cuántas tienen las dos vocales juntas? ¿Cuántas están formadas exclusivamente por consonantes? ¿Cuántas contienen ambas vocales?

11.- Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6, ¿cuántos números de 6 cifras diferentes pueden formarse? Suponiendo que los ordenamos según el orden natural, ¿qué lugar ocupa el número 421653? ¿Cuál será el número que ocupe el lugar 382?

12.- En un bosque hay distribuidas x casetas de guarda. Cada una de las casetas está unida con las restantes mediante un camino. En total hay 21 caminos. ¿Cuántas casetas de guarda hay?

13.- ¿Cuántos símbolos morse pueden hacerse con 3 puntos y 2 rayas?

14.- Para transmitir señales tenemos 5 focos. Cada foco puede emitir luz de color blanco, verde o rojo y también puede estar apagado. ¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse? ¿Cuántas si todos los focos están encendidos? ¿Cuántas si sólo hay 2 focos encendidos?

15.- En un plano existen 8 puntos de modo que no hay 3 alineados. ¿Cuántas rectas determinan estos 8 puntos? Si hubiera 4 alineados, ¿cuántas rectas determinarían ahora los 8 puntos? Apoyándote en este problema, deduce la fórmula que determina el número de diagonales de un polígono convexo de n lados.

16.- ¿Cuántos números de 4 cifras tienen dos ceros y sólo dos?

17.- Se tiene un rectángulo dividido en 6x5 cuadros. Averigua el número de rutas distintas que llevan de un vértice del rectángulo al opuesto siguiendo los lados del rectángulo sin retroceder nunca.

18.- ¿Cuántos son los casos posibles de repartir las 28 fichas del dominó entre 4 jugadores?

19.- ¿De cuántas maneras pueden distribuirse 12 naipes entre dos jugadores dando 4 naipes a cada uno?

20.- Queremos formar un comité eligiendo 4 personas entre 12 (8 chicos y 4 chicas). ¿Cuántos comités distintos pueden confeccionarse? ¿Cuántos tienen una chica exactamente? ¿cuántos tienen una chica por lo menos?

21.- Tenemos 10 amigos y queremos invitar a comer a 5 de ellos. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo? ¿De cuántas maneras si dos de ellos, A y B, son matrimonio y no asisten el uno sin el otro? ¿De cuántas si dos de ellos, C y D, no se llevan bien y si asiste uno no lo hace el otro?

22.- Disponemos de una baraja francesa de 52 cartas. ¿Cuántas jugadas póker existen?, y ¿jugadas füll?

23.- En un examen existen 13 preguntas de las cuales sólo debemos responder a 10. ¿Cuántas maneras tenemos de elegir las 10 preguntas? ¿Cuántas si las 5 primeras son obligatorias? ¿Cuántas si tiene que elegir exactamente 4 de las 5 primeras? ¿Cuántas si tiene que elegir por lo menos 4 de las 5 primeras?

24.- ¿De cuántas maneras 3 niños y 2 niñas pueden sentarse en una fila? ¿De cuántas maneras si los niños se sientan juntos y las niñas también? ¿De cuántas maneras si justamente las niñas se sientan juntas?

25.- Halla el número de palabras diferentes que pueden formarse con las letras de la palabra CÁMARA. ¿Cuántas empiezan y terminan por A? ¿Cuántas tienen las 3 letras A juntas?

26.- ¿Cuántas quinielas existen con ocho signos 1, cinco signos X y dos signos 2?

27.- ¿De cuántas maneras pueden colocarse 9 turistas en 3 habitaciones de 2, 3 y 4 camas?

28.- ¿Cuántos números de 5 cifras pueden escribirse de modo que tengan las 3 primeras cifras impares y las 2 últimas pares?

29.- El resultado de un partido de fútbol entre el Zaragoza y el Barcelona ha sido 5-3. ¿De cuántas maneras se ha podido llegar a este resultado?

30. Una clase consta de 12 alumnos con los que se desea formar 4 equipos de 3 alumnos cada uno. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los alumnos?

31.- El número de variaciones binarias que pueden formarse con cierto número de elementos excede en 9 al número de combinaciones, también binarias, que podríamos formar con un elemento más. ¿De cuántos elementos disponemos?

32.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\binom{m+1}{2}+\binom{m}{2}+\binom{m-1}{2}=19 \qquad \binom{16}{x+1}=\binom{16}{x-1}$$

$$70\binom{x}{2}=28\binom{x}{4} \qquad 7\binom{2x-2}{x-1}=2\binom{2x}{x}$$

$$V_{x,2}+5P_3=9x+6 \qquad P_{x-1}=56P_{x-3} \qquad 2VR_{x,3}=9V_{x,2}$$

33.- Comprueba que $\binom{m}{n}=\frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1}$

34.- Justifica del modo más rápido posible $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=15$

35.- Calcula el valor de $\binom{525}{523}+\binom{525}{524}$

36.- Razona que para que se cumpla $\binom{x}{y}=2\binom{x-1}{y}$ es preciso que $x=2y$

PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

1.- Se lanzan tres monedas al aire. Calcular su espacio muestral:

a) Si las tres monedas son distintas.

b) Si las tres monedas son iguales.

2.- Sea el experimento aleatorio “lanzar un dado dos veces”, consideramos los sucesos A “obtener un número par y luego uno impar”

B “obtener entre las dos tiradas 8 puntos”

se pide:

a) Hallar el espacio menestral del experimento
b) Decir si A y B son compatibles.
c) ¿A y B son contrarios? En caso de respuesta negativa indicar el suceso contrario de A.

3.- Se lanza una moneda cargada. ¿Cuál es la probabilidad de obtener caras si se sabe que esta probabilidad es cuatro veces mayor que la de obtener cruz?

4.- Una bolsa contiene 3 bolas blancas y 7 negras, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer una bola al azar, ésta sea blanca?

5.- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un “doble” al extraer al azar una ficha de dominó?

6.- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un rey al elegir al azar una carta de una baraja española?, ¿y la de obtener dos reyes si se extraen dos cartas?

7.- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un rey o un basto al extraer una carta de una baraja española?

8.- ¿Cuál es la probabilidad de de sacar un número par al lanzar un dado?, ¿y la de obtener una suma par al lanzar dos dados?

9.- En un aula de 40 alumnos se eligen un delegado y un subdelegado. Si la elección se hace al azar, ¿cuál es la probabilidad de que un determinado alumno resulte elegido para uno de los dos puestos?

10.- En una baraja española se extraen de una vez tres cartas. Calcular la probabilidad de que sean tres reyes.

11.- Se seleccionan al azar dos cartas entre 10 numeradas del 1 al 10. hallar la probabilidad de que la suma sea impar si:

a) Las dos cartas se sacan juntas.
b) Se sacan una tras otra sin devolución.
c) Las dos cartas se sacan una tras otra con devolución.

12.- Se lanzan 6 monedas al aire. Calcular la probabilidad de obtener 4 caras y 2 cruces.

13.- Calcular la probabilidad de que al lanzar 4 dados a la vez, se obtengan al menos un 3.

14.- Tres chicas y tres chicos van al cine y se sientan en sitios contiguos.¿Cuál es la probabilidad de que se sienten alternados si la elección del sitio se ha hecho al azar? Si una pareja (chico-chica) tiene especial interés en estar juntos y los consigues, ¿cuál será la probabilidad de que el resto se sienten alternadamente?

15.- Una habitación está iluminada por 5 bombillas que se encienden o apagan al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que, en un instante cualquiera, la habitación esté iluminada por más de tres bombillas?

16.- Escribimos tres cartas y sus sobres correspondientes. Metemos las cartas en los sobres al azar. ¿Cuál es la probabilidad de acertar?, ¿y la de fallar?, ¿y la de acertar sólo una?

17.- Se colocan en un bombo de lotería 6 bolas con las letras B, R, A, S, I, L. Si se extraen una a una, ¿cuál es la probabilidad de que aparezcan en el mismo orden que las letras de la palabra BRASIL? ¿Y de que aparezcan las dos vocales juntas?

18.- Tenemos 10 cajas y en 3 de ellas hay premio. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir 3 cajas al azar se obtengan los tres premios?, ¿y sólo 2?, ¿y sólo 1?, ¿y ninguno? Resuelve el mismo problema eligiendo 4 cajas en lugar de 3

19.- Se dispone de 10 bolígrafos, cuatro de los cuales son defectuosos. Si se toman tres al azar, hallar la probabilidad de que:

a) Los tres sean defectuosos
b) Exactamente dos sean defectuosos
c) Uno, al menos, sea defectuoso.

20.- En un ejercicio de oposiciones hay 100 temas. El examen consiste en desarrollar dos temas entre cuatro que se eligen al azar. Si un opositor sólo ha estudiado 65 temas, cuál es la probabilidad de que:

a) Pueda desarrollar perfectamente dos temas.
b) Sólo pueda desarrollar un tema.
c) No conozca ninguno de los cuatro temas

21.- Se reparten 5 cartas de una baraja francesa (52 cartas). ¿Cuál es la probabilidad de conseguir un póquer? , ¿Y un full?

22.- ¿Cuál es la probabilidad de colocar 8 torres sobre un tablero de ajedrez, sin que se amenacen entre ellas?

23.- Un libro consta de 100 páginas, en 8 de las cuales hay encabezamiento de capítulo. Si se abre el libro al azar 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos encabezamientos de capítulo?

24.- A una persona se le reparten 4 espadas de una baraja de 52. si le dan 3 cartas más, hallar la probabilidad de que al menos una de las cartas adicionales sea de espadas.

25.- Luis tiene 8 amigos que celebran una fiesta cuando llega el día de su cumpleaños, y le invitan siempre. ¿Cuál es la probabilidad de que durante el año 1989 no pueda aceptar alguna de las invitaciones, debido a que coincidan dos aniversarios?

26.- En una bolsa hay dos dados, uno normal de 6 caras y otro tetraédrico de4 caras. Se elige un dado al azar y se lanza. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 3?

27.- Un ferrocarril tiene una probabilidad de 0,0035 de sufrir un accidente un día con niebla y 0,00002 si no hay niebla. Si en abril hay 5 días con niebla, ¿qué probabilidad hay de que el tren sufra un accidente ese mes?

28.- Dos máquinas elaboran el mismo tipo de piezas. La probabilidad de que la máquina A produzca una pieza defectuosa es de 0,13, mientras que dicha probabilidad es de 0,18 en la máquina B. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una pieza defectuosa del taller si se sabe que el 60% de la producción lo realiza la máquina A y el resto la máquina B?

29.- Se tienen dos urnas cuya composición es:

Urna A: 4 bolas blancas y 3 negras

Urna B: 3 bolas blancas y 4 negras

Se elige una urna al azar y se extrae una bola; si es blanca se vuelve a extraer una bola de la misma urna y, si es negra, de la urna contraria. Calcular la probabilidad de que la última bola sea negra.

30.- En una urna hay 2 bolas que sólo pueden ser blancas o negras, pero no se sabe cuántas hay de cada color. Si se pone una bola blanca en la urna y se extrae luego una al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar bola blanca?, ¿y bola negra?

VARIABLES ALEATORIAS

31.- Se lanzan cuatro monedas normales al aire y se considera la variable aleatoria “número de caras aparecidas”. Calcular la función de cuantía de dicha variable.

32.- En una determinada zona geográfica la probabilidad de que una persona sea rubia es de 0,25. Se eligen tres personas al azar y se pide calcular la función de cuantía y la función de distribución de la variable aleatoria “número de personas rubias”.

33.- En una caja hay tres bolas blancas y dos negras. Se extraen dos bolas al azar consecutivamente y sin devolución. Si las dos bolas son blancas, se ganan 3 euros, si son ambas negras se pierden 0,6 euros y si son de distintos, la perdida es de 0,2 euros. Halla la función de cuantía y la función de distribución de la variable “ganancia o pérdida”

34.- Una máquina elabora lotes de 100 piezas. Se sabe que la variable aleatoria “número de piezas defectuosas en el lote” responde a la siguiente tabla de probabilidades acumuladas:

x_i	p_i
0	0,6
1	0,75
2	0,83
3	0,9
4	0,95
5	1

Se pide:

a) Construir la función de distribución y la cuantía.
b) Calcular la probabilidad de obtener un lote con dos o tres piezas defectuosas
c) Si se eligen dos lotes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los lotes tengan dos piezas defectuosas?

35.- Sea una variable aleatoria discreta X cuya función de cuantía viene dada por:

$P_i = k(x_i - 2)$

Sabiendo que los valores que puede tomar la variable son:

$x_1 = 3$ $\quad x_2 = 4$ $\quad x_3 = 5$ $\quad x_4 = 6$ $\quad x_5 = 7$

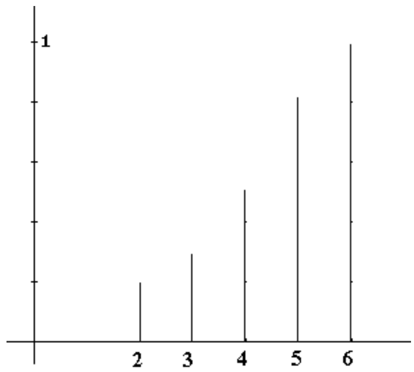
Se pide:

a) Calcular *k*
b) ¿x_1 podría haber tomado el valor 1?
c) Construir la función de distribución
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable X tome los valores 4, 5 o 6?

36.- El diagrama que representa las probabilidades acumuladas asociadas a una cierta variable aleatoria discreta es el siguiente:

Se pide:

a) Construir la función de cuantía y la función de distribución representarlas.
b) Calcular la probabilidad de que la variable tome los valores 3 o 4.



37.- Calcular la esperanza matemática y la varianza de las variables aleatorias discretas que aparecen en los problemas anteriores.

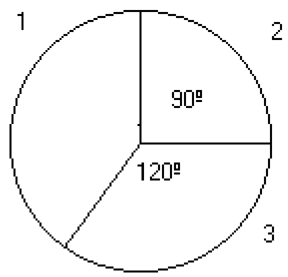
38.- Sea X una variable aleatoria discreta, siendo su esperanza y su varianza respectivamente m y s^2 . Hallar la esperanza y la varianza de la variable aleatoria que resulta de tipificar X.

39.- En una compañía de seguros se sabe que la probabilidad de que una mujer sufra un accidente de coche durante un año es de 0,2, mientras que si es hombre la probabilidad aumente hasta 0,3. El 80 % de los asegurados en dicha compañía son hombres. Se eligen al azar dos asegurados y se considera la variable aleatoria “número de personas con accidente en el año”. Se pide:

a) Construir las funciones de cuantía y distribución.
b) Hallar la esperanza matemática y la varianza de la variable.

40.- Una persona juega en una ruleta como la de la figura del siguiente modo:

Apuesta 1 euro. Si la bola cae en el sector 2, el jugador ni gana ni pierde; si la bola cae en el sector 1 pierde el dinero de la apuesta, y finalmente, si la bola se detiene en el sector 3, le devuelven la apuesta más 2 euros de ganancia. ¿Es justo o no este juego?



41.- Una máquina tragaperras de cada 100 veces que se juega con ella devuelve el dinero en 30 ocasiones, lo dobla en 5, lo triplica en 3, en 2 veces multiplica por 10 la cantidad apostada y una sola vez devuelve la apuesta multiplicada por 25. ¿Es justo este juego?, ¿qué beneficio puede esperar el dueño de la máquina?

42.- Se tira una moneda al aire; si sale cruz se ganan 3 euros y se termina el juego. Si sale cara se sigue jugando con la misma regla hasta que se haya tirado la moneda como máximo tres veces. Si ha salido cruz a la segunda se cobra 1,2 y 0,6 euros si la cruz ha aparecido a la tercera tirada. Si se han obtenido tres caras debe pagarse la cantidad de 15 euros. ¿Es un juego equitativo? Halla su esperanza y su varianza. Hacerlo

43.- Un vendedor de botas de agua puede ganar 30 euros en un día de lluvia, pero pierde 3 euros si no llueve. ¿Cuál es su esperanza un día en que se ha anunciado que lloverá con una probabilidad del 60%?

44.- Un empresario tiene que decidirse por uno de los dos negocios siguientes: en el primero sabe que triplicará el dinero invertido con una probabilidad de 0,2, lo doblará con probabilidad 0,2 y lo recuperará con probabilidad 0,2, perdiéndolo todo si no sucede una de estas tres posibilidades. En el segundo negocio la probabilidad de duplicar el dinero invertido es de 0,4, de mantenerlo 0,3, de perder la mitad 0,2 y de perder la totalidad el resto. ¿Por cuál de los dos negocios debe decidirse el empresario?

45.- La probabilidad de que una persona sufra un accidente es de 0,15. ¿Cuánto tendrá que pagar a su compañía de seguros si ésta debe indemnizar con 6.000 euros cuando se produzca el accidente?

46.- Una urna contiene 3 bolas blancas y 5 negras. Tres jugadores ponen una cantidad inicial y juegan del modo. Manteniendo el orden A, B C extraen uno a uno una bola sin reposición, deteniéndose el juego en el momento que uno saca bola blanca. En ese instante el jugador que ha obtenido bola blanca, se lleva todo el dinero puesto por los tres. Si el jugador C ha puesto inicialmente 6 euros, ¿qué cantidad deben poner A y B para que el juego sea justo?

47.- Se considera una cuerda de 1 metro de longitud de extremos A y B. Al azar se da un corte. Hallar la función de distribución y la de densidad de la variable aleatoria "distancia del punto de corte al extremo A"

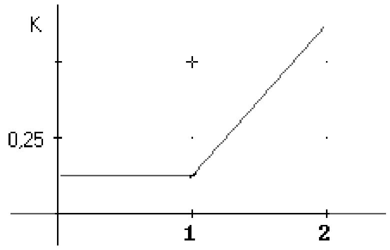
48.- Un alumno de 2º de bachillerato coge el autobús todos los días para ir al instituto. Su experiencia le dice que, independientemente de la hora a la que salga, tendrá que esperar como mucho 15 minutos. Hallar la función de distribución y la función de densidad de la variable aleatoria "tiempo que debe esperar el alumno el autobús"

49.- Una persona lanza dardos al azar sobre una diana circular de radio 50 cm. Si se define la variable aleatoria "distancia del punto de impacto al centro de la diana", construir la función de distribución de dicha variable aleatoria y, a partir de ella, obtener la función de densidad.

50.- Se sabe que la función de densidad $y = f(x)$ de una variable aleatoria continua, tiene la siguiente gráfica, donde $f(2) = K$

Se pide:

a) Calcular el valor de *K*.
b) Hallar la ecuación de la función de densidad.
c) Hallar la ecuación de la función de distribución.
d) Calcular, tanto a partir de la función de densidad como de la función de distribución, el valor de $\mathrm{P}(x > 1{,}5)$



51.- La función de distribución de una variable aleatoria continua tiene por ecuación:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 4x^2 & \text{si} \quad 0\le x\le k \\ 1 & \text{si} \quad x>k \end{cases}$$. Se pide:

a) Calcular k

b) Calcular $P(x \le 1/4)$

c) Calcular $P(1/8 \le x \le 1/4)$

d) Encontrar la función de densidad y, comprobar con dicha función, los resultados obtenidos en los apartados b) y c)

52.- La función de distribución de una variable aleatoria continua es:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<3 \\ \sqrt{x+6}-3k & \text{si} \quad 3\le x\le 10 \\ 1 & \text{si} \quad x>10 \end{cases}$$

Se pide calcular:

a) k

b) $P(x \le 4)$

c) $P(6 \le x \le 8)$

d) la función de densidad.

53.- La función de densidad de una variable aleatoria continua tiene por ecuación:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{k-x}{2} & \text{si} \quad 0<x<2 \\ 0 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Se pide calcular:

a) k

b) $\mathrm{P}(x \le 1/4)$

c) $\mathrm{P}(1/4 \le x \le 3/4)$

d) La función de distribución.

54.- La función de densidad de una variable aleatoria continua tiene por ecuación:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 3x+2{,}5 & \text{si} \quad 0<x<k \\ 0 & \text{si} \quad x>k \end{cases}$$

Se pide calcular:

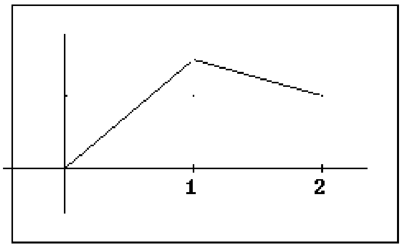
a) k

b) $\mathrm{P}(x \ge 1/6)$

c) $\mathrm{P}(x \le 1/6)$

d) $\mathrm{P}(1/6 \le x \le 1/5)$.

55.- La función de densidad de una cierta variable aleatoria continua *X* responde al gráfico:



Si se sabe que $f(1)=0{,}75$, ¿qué valor toman las expresiones $f(2)$, $f(1{,}5)$, $\mathrm{P}(x \le 0{,}5)$ y $\mathrm{P}(x \ge 1)$?

56.- Se sabe que la función de densidad de una variable aleatoria continua es:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ ax + b & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Calcula *a* y *b* sabiendo que $\mathrm{P}(-1/4 \le \mathrm{x} \le 1/2) = 0{,}25$

57.- Hallar la media y la desviación típica de todas las variables aleatorias continuas de los problemas anteriores.

58.- La duración en minutos de una conversación telefónica es una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-x}{3}}}{3} \qquad \text{con } x \ge 0$$

Calcula:

a) La probabilidad de que una conversación dure entre 1 y 3 minutos.
b) La probabilidad de que una conversación dure más de 3 minutos.
c) La duración esperada de una conversación (la media)

59.- Una aguja de longitud L gira con centro en el eje de coordenadas. Se le da un impulso inicial y se observa la abscisa del punto en que queda el extremo de la aguja, cuando ésta finalmente se para.

a) Hallar la función de distribución de la variable aleatoria que indica la abscisa del punto extremo de la aguja.
b) Hallar la función de densidad y dibuja su gráfica.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la abscisa sea menor que 0,5? ¿Cuál es la probabilidad de que sea un número comprendido entre 0,2 y 0,7? ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor que 0,6?

60.- Se dispone de un cono de altura 8 dm. y radio de la base 3 dm. Se realiza un corte paralelo a la base al azar y se considera la variable aleatoria “radio de la circunferencia que se obtiene al dar el corte”. Se pide:

a) hallar la función de distribución y la función de densidad de la variable.
b) Calcular la probabilidad de que el corte de lugar a una circunferencia de radio mayor que 2.
c) Calcular la probabilidad de que el corte de lugar a una circunferencia cuyo radio esté comprendido entre 1 y 2.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

61.- La probabilidad de escoger un tornillo defectuoso de una caja es 0,2, calcular la probabilidad de que al realizar 4 extracciones se saquen 3 tornillos defectuosos.

62.- En un buque, una maniobra sin fallos suele producirse el 80% de las veces. Queremos calcular la probabilidad de que en 10 maniobras se produzcan 2 fallos.

63.- Calcular la probabilidad de que una familia con 4 hijos tanga como máximo 3 niños, suponiendo que la probabilidad de que nazca un niño es 0,5.

64.- Calcular la probabilidad de que en 10 tiradas de una moneda perfecta salgan por lo menos 7 caras.

65.- Calcular la probabilidad de que en 10 tiradas de una moneda perfecta salgan como máximo 6 caras.

66.- Se sabe que en el año 1986 la probabilidad de que una persona padeciera la gripe fue de 0,16 si se eligen al azar 3 persona, ¿cuál es la probabilidad de que una exactamente haya padecido la gripe?, ¿y de que al menos una de las tres haya sufrido dicha enfermedad?

67.- Se lanzan dos dados y se denomino "éxito" a obtener una suma de puntos mayor que 7. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 "éxitos" y 2 "fracasos" en 5 jugadas?, ¿y de lograr al menos 2 "éxitos" en 4 jugadas?, ¿cuántas jugadas deben realizarse para que la probabilidad de obtener al menos 1 "éxito" sea mayor que 0,6?

68.- Con la ayuda de las tablas calcular las funciones de cuantía y de las distribuciones binomiales:

$$B(10, 0'1) \qquad B(10, 0'5) \qquad B(10, 0'8)$$

representar sus correspondientes diagramas y observar la influencia del valor de p en los gráficos. Calcular la esperanza matemática y la varianza de cada una de estas distribuciones.

69.- Dada la distribución binomial $B(9, 0'4)$, calcular:

a) $P(x_i = 6)$

b) $P(x_i > 6)$

c) $P(x_i \leq 3)$

d) $P(6 < x_i \leq 8)$

Representar la función de distribución de $B(9, 0'4)$ y comprobar en ella los resultados obtenidos en a), b), c) y d).

70.- De una distribución binomial $B(8, p)$ se sabe que su esperanza matemática es 2,4. se pide calcular la varianza de dicha distribución, así como las siguientes probabilidades:

a) $P(x_i > 5)$

b) $P(x_i = 2)$

c) $P(4 \leq x_i < 6)$

71.- Una distribución binomial $B(n, p)$ cumple:

$$E(x) = 3 \qquad s^2 = 2{,}1$$

Calcular:

a) El valor de n y p.

b) $P(x_i \leq 7)$

c) $P(2 < x_i < 6)$

72.- Se lanza una moneda normal 10 veces. Hallar la probabilidad de:

a) Obtener exactamente10.
b) Obtener más de 7 caras.
c) Obtener entre 5 y 8 caras.

73.- Se dispone de una batería de 5 bombillas que se encienden apretando un interruptor para cada una. La probabilidad de que este interruptor funcione correctamente es 0,8 en cada caso. Calcula la probabilidad de que al accionar los 5 interruptores

a) Se enciendan sólo 3 bombillas
b) Se enciendan por lo menos 3 bombillas
c) Se enciendan como máximo 4 bombillas.

74.- A un congreso asisten 130 hombres y 700 mujeres, al final se realiza una cena en la que los congresistas se distribuyen al azar en mesas de 8. ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya el mismo número de hombres que de mujeres? ¿Y de que haya al menos 4 hombres más que mujeres?

75.- Un aprendiz de alfarería rompe la pieza que elabora con un a probabilidad de 0,25. si en un día realiza 10 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que rompa una sola pieza?, ¿y menos de tres?, ¿y más de cuatro?

76.- En un aula con 40 alumnos hay 12 con ojos azules. Se realiza el siguiente experimento: se elige al azar un alumno t se observa el color de sus ojos; el alumno elegido vuelve a reintegrarse en el aula y se elige un segundo alumno, y así sucesivamente hasta un total de 7 alumnos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir por lo menos 4 alumnos con ojos azules?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los 7 alumnos elegidos tuviera los ojos azules?
c) Si los alumnos elegidos no se reintegrasen al aula, ¿podría realizarse el problema con el uso de una distribución binomial?, ¿cómo se resolverían los apartados a) y b).

77.- La probabilidad de aprobar la asignatura de matemáticas en 1º de bachillerato es de 0,65. Diez amigos están estudiando esta asignatura y quieren saber:

a) La probabilidad de que aprueben todos.
b) La probabilidad de que aprueben sólo la mitad.
c) La probabilidad de que aprueben más de 5 pero menos de 8.
d) La probabilidad de que aprueben más de la mitad.

78.- Un jugador de fútbol es el encargado en su equipo de lanzar los penaltis. A lo de la competición su equipo dispone de 8 penaltis a favor que él lanza, si la probabilidad de conseguir gol es 0,85:

a) ¿Cuántos goles cabe suponer que acertará?
b) ¿Qué probabilidad tiene de meter 6 goles o más?
c) ¿Qué límites podrían fijarse para considerar que el año ha sido normal, bueno o malo para este jugador en cuanto a lanzamientos de penaltis?

79.- Dos personas juegan del siguiente modo: cada una de ellas pone 1 euro y se lanza un dado. Si sale par, la persona A se queda con el dinero; mientras que si sale impar es B quién recoge para sí la cantidad apostada por los dos. Al cabo de 10 jugadas:

a) ¿Qué probabilidad tiene A de no ganar ni perder?
b) ¿Qué probabilidad tiene A de ganar 2 euros?, ¿y 4 euros?
c) ¿Qué probabilidad tiene A de perder más de 6 euros?
d) ¿Es posible que, al cabo de las 10 jugadas, A haya perdido 3 euros?

80.-Un cazador dispara con probabilidad de acierto igual a 0,7. Si dispara 6 veces

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar por lo menos 3?
b) ¿Cuántos disparos debe realizar para que la probabilidad de acertar al menos una vez sea mayor que 0,9?

81.- Se dispone de una moneda que no se sabe si es perfecta. Para comprobarlo se lanza 10 veces y se observa que salen 3 caras y 7 cruces. ¿Puede asegurarse que es perfecta?, ¿e imperfecta?. ¿Es más probable que la probabilidad de cara sea 0,2 o 0,6? A la vista del resultado y si se llama p a la probabilidad de obtener cara, ¿cuál es el valor más probable de p?

82.- Para las distribuciones binomiales con $n = 10$, ¿cuál debe ser el valor de p a fin de obtener una varianza máxima?

DISTRIBUCIÓN NORMAL

83.- La variable aleatoria continua X responde a una distribución normal tipificada $N(0,1)$. Se pide calcular:

a) $P(x \geq 0{,}38)$

b) $P(x \leq -0{,}42)$

c) $P(x \leq 1{,}36)$

d) $P(x \leq -1{,}28)$

e) $P(0{,}68 \leq x \leq 1{,}32)$

f) $P(-2{,}15 \leq x \leq 0{,}75)$

84.- La variable aleatoria x se distribuye según una normal tipificada. Se pide calcular z en los casos siguientes:

a) $P\left(x \geq z\right) = 0{,}38$

b) $P\left(x \geq z\right) = 0{,}73$

c) $P\left(x \leq z\right) = 0{,}65$

d) $P\left(x \leq z\right) = 0{,}21$

e) $P\left(-z \leq x \leq z\right) = 0{,}82$

85.- Al disparar una determinada pieza de artillería, se observa que el disparo sufre un cierto desplazamiento horizontal sobre el objetivo previsto de tal manera que dichos desplazamientos se distribuyen según una normal tipificada. Teniendo en cuenta que una unidad en el eje de abscisas equivale a 10 metros y que el objetivo se considera alcanzado siempre que el impacto esté alejado menos de 5 metros del objetivo, se pide:

a) Probabilidad de alcanzar el objetivo
b) Probabilidad de no alcanzarlo
c) Probabilidad de que el disparo esté alejado por lo menos 10 metros del objetivo.
d) Probabilidad de que el disparo caiga a menos de 10 metros. ¿Y a menos de 20?, ¿y a menos de 30?
e) ¿A cuántos metros del objetivo puede suponerse que caerán la mitad de los disparos?

86.- En un país privilegiado los trenes llegan normalmente a la hora exacta, con una desviación típica de 1 minuto. Calcula:

a) La probabilidad de que llegue como máximo medio minuto después de la hora exacta.
b) La probabilidad de que llegue a la hora exacta.
c) La probabilidad de que llegue más de 1 minuto después de la hora exacta.

87.- La variable aleatoria continua x se distribuye según una normal $N(32,6)$. Se pide calcular:

a) $P(x \geq 34{,}5)$
b) $P(x \geq 28{,}32)$
c) $P(x \leq 29{,}15)$
d) $P(27{,}3 \leq x \leq 36{,}25)$
e) $P(x \leq 33{,}33)$

88.- Si la variable aleatoria x responde a una normal $N(65,5)$, calcular el valor de z en los casos siguientes:

a) $P(x \geq z) = 0{,}23$
b) $P(x \geq z) = 0{,}84$
c) $P(x \leq z) = 0{,}27$
d) $P(x \leq z) = 0{,}72$

89.- Dada una distribución normal $N(122,12)$ y dos valores a y b de la variable, simétricos respecto a 122, ¿Cuánto tiene que valer a y b para que $P(a \leq x \leq b) = 0{,}6826$?

90.- Se sabe que el grosor de los tornillos de una partida se distribuyen como una variable aleatoria normal de media 10,5 mm y desviación típica de 0,5 mm. Se pide la probabilidad de que un tornillo tenga grosor:

a) Mayor que 12 mm.
b) Mayor que 9,5 mm.
c) Comprendido entre 10 y 11,2 mm

91.- Se sabe que la latir de los hombres de 18 años de una ciudad se ajusta a una distribución normal de media 172 cms. con una desviación típica de 6 cms. Se pide:

a) Probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de 180 cms.
b) ¿Qué porcentaje de la población medirá menos de 165 cms?
c) ¿Qué porcentaje de población está comprendido entre 167 y 185 cms?
d) ¿Qué alturas calificarían a un individuo como muy alto, normal, bajo o muy bajo?

92.- Una máquina empaquetadora distribuye clavos en caja según una distribución normal $N(500,12)$, se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja contenga más de 506 clavos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de clavos de una caja esté comprendido entre 485 y 503?
c) El 60 % de las cajas tiene un número de clavos comprendido entre 491 y a. calcular el valor de a

93.- Se realiza una prueba de matemáticas que consta de 100 preguntas y se sabe que las notas (de 0 a 10) se distribuyen según una normal $N(60,10)$. El profesor desea que las notas se repartan según porcentajes del siguiente modo:

Muy deficiente: 10%
Insuficiente: 30 %
Suficiente: 20 %
Bien: 20 %
Notable: 10 %
Sobresaliente: 10 %

Se quieren saber qué número de puntos definen cada una de las calificaciones.

94.- Se sabe que el coeficiente de inteligencia en una población normal elegida al azar se ajusta a una distribución normal de media 100 y desviación típica de 15. Se realiza una prueba para medir dicho coeficiente en un aula de 40 alumnos. ¿Cuántos alumnos cabe esperar que resultarán “normales”?, ¿e inteligentes?

95.- En un examen de Biología el 40 % de los alumnos ha obtenido una nota mayor que 6 y el 10 % una nota menor que 3, sabiendo que la distribución de las notas se rigen por una normal, calcular la media y la desviación típica de dicha distribución.

96.- En una fábrica se elaboran piezas únicamente de dos tipos A y B. Si se sabe que el 35 % de las piezas corresponde al tipo A y que se eligen al azar 200 piezas obtenidas en la fábrica, se pide la probabilidad de:

a) Coger más de 100 piezas del tipo A
b) Coger igual o más de 100 piezas del tipo A
c) Coger más de 50 piezas del tipo A
d) Elegir entre 40 y 75 piezas del tipo A

97.- Una moneda está cargada de modo que la probabilidad de obtener cara es igual a 2/3 de la probabilidad de obtener cruz. Se lanza 125 veces:

a) ¿cuál es la probabilidad de obtener más de 70 caras?
b) ¿cuál es la probabilidad de obtener 50 caras al menos?
c) ¿cuál es la probabilidad de obtener entre 55 y 70 caras?

98.- Una persona participa en un juego. Se sabe que si el juego se repite 120 veces, la probabilidad de ganar más de 75 veces es igual a 0,2578. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en el juego?

99.- Un cierto parásito afecta a los 300 árboles de un pinar. Se sabe que la probabilidad de que un árbol atacado por el parásito muera es de 0,3. se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos muera la tercera parte del pinar?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que mueran entre 80 y 120 árboles?

100.- Se lanzar dos dados normales 75 veces y se suma la puntuación obtenida en cada uno de ellos. Hallar la probabilidad de obtener más de 40 veces una puntuación mayor que 6.

101.- Una lista internacional de correos se maneja por medio de una computadora. Las nacionalidades de los componentes de la lista son las siguientes:

20 % españoles 12% franceses 8% italianos 30% americanos 30% asiáticos

Se pide a la computadora que seleccione al azar 200 nombres de la lista. Calcula:

a) La probabilidad de que sean seleccionados por lo menos 80 nombres europeos
b) ¿y como máximo 20 americanos?